

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

Instituto de Ingeniería y Tecnología

Departamento de Física y Matemáticas



**CARACTERIZACIÓN MICROMECAÁNICA DE
COMPOSITOS MAGNETO-ELECTRO-
ELÁSTICOS**

**Tesis en opción al grado de
DOCTOR EN CIENCIAS DE LOS MATERIALES**

MSc. YOANH ESPINOSA ALMEYDA

Cd. Juárez, Chihuahua, marzo del 2018.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

Instituto de Ingeniería y Tecnología

Departamento de Física y Matemáticas



**CARACTERIZACIÓN MICROMECAÁNICA DE COMPOSITOS
MAGNETO-ELECTRO-ELÁSTICOS**

AUTOR

YOANH ESPINOSA ALMEYDA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Héctor Camacho Montes

Co – DIRECTORES DE TESIS

Dr. Reinaldo Rodríguez Ramos, Dr. José Antonio Otero Hernández,

Dr. Raúl Guinovart Díaz, Dr. Juan Carlos López Realpozo

Cd. Juárez, Chihuahua, marzo del 2018.

A mi Mamá

A mi Papá

A mi pequeña Alessandra

A mi linda familia

Índice

Agradecimientos	iv
Índice de Figuras	x
Índice de Tablas	xii
Resumen.....	xiv
1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	4
1.2 Definición del problema.....	10
1.3 Originalidad y Justificación	11
1.4 Hipótesis.....	12
1.5 Objetivos	12
1.5.1 Objetivo general	12
1.5.2 Objetivos específicos.....	12
2. Fundamentos de la mecánica de materiales compuestos. Ecuaciones fundamentales	14
2.1 Compositos.....	14
2.2 Elementos representativos del volumen.....	15
2.3 Ecuaciones fundamentales de la magneto-electro-elasticidad lineal.....	16
2.4 La interacción entre los constituyentes	19
2.4.1 Condiciones sobre la interfaz: modelo bifásico con contacto imperfecto o modelo imperfecto	22
2.4.2 Condiciones sobre la interfaz: modelo trifásico o modelo de interfase.....	24
2.5 Problemas de deformación plana y antiplana.....	24
2.6 Sistemas cristalinos y Redes de Bravais.....	25
2.7 Simetría estructural de los materiales.....	28
2.8 Materiales constituyentes	31
2.9 Método de homogeneización asintótica a doble escala.....	35
2.10 Método de los elementos finitos.....	38
2.10.1 Características de los elementos finitos.....	39
2.10.2 Representación isoparamétrica.....	41
2.10.3 Elemento cuadrilátero cuadrático	42
2.10.4 Elemento tetraédrico cuadrático	43

2.11	Formulación variacional como una generalización del principio de Hamilton para composites magneto-electro-elásticos. Energía potencial total.....	45
3.	Método de homogeneización asintótica: problemas locales y propiedades efectivas de composites fibrosos magneto-electro-elásticos.....	49
3.1	Solución analítica de los problemas locales y obtención de propiedades efectivas antiplanas para un composite fibroso bifásico bajo condiciones de contacto imperfecto.....	56
3.1.1	Problemas locales antiplanos $\mathcal{L}_{\alpha 3}$: Formulación y solución	58
3.1.2	Problemas locales antiplanos $\mathcal{I}_{\alpha}$ y $\mathcal{J}_{\alpha}$: Formulación y solución.....	69
3.2	Solución analítica de los problemas locales y obtención de propiedades efectivas antiplanas para un composite fibroso trifásico	72
3.2.1	Problemas locales antiplanos $\mathcal{L}_{\alpha 3}$: Formulación y solución	73
3.2.2	Problemas locales antiplanos $\mathcal{I}_{\alpha}$ y $\mathcal{J}_{\alpha}$: Formulación y solución.....	78
4.	Método de los elementos finitos: Problemas locales y propiedades efectivas de composites fibrosos trifásicos magneto-electro-elásticos	79
4.1	Solución semi-analítica (SAFEM) de los problemas locales y cálculo de propiedades efectivas antiplanas para composites fibrosos trifásico magneto-electro-elásticos con elementos representativos del volumen bidimensionales.....	79
4.1.1	Problemas locales antiplanos $\mathcal{L}_{\alpha 3}$. Formulación y solución semi-analítica	80
	Implementación del método de elementos finitos para los problemas de contorno locales.....	83
4.1.2	Problemas locales antiplanos $\mathcal{I}_{\alpha}$ y $\mathcal{J}_{\alpha}$. Formulación y solución semi-analítica	87
4.2	Solución semi-analítica (SAFEM) de los problemas locales y cálculo de propiedades efectivas para composites fibrosos trifásico magneto-electro-elásticos con elementos representativos del volumen tridimensionales	88
4.2.1	Problemas locales $\mathcal{L}_{\alpha 3}$: Formulación y solución.....	89
	Implementación del método de elementos finitos para la solución de los problemas de contorno locales.....	91
4.2.2	Problemas locales $\mathcal{I}_{\alpha}$ y $\mathcal{J}_{\alpha}$. Formulación y solución semi-analítica.....	94
5.	Resultados y Discusión	95
5.1	Efecto de las condiciones de contacto imperfecto en la interfaz, de la distribución de los refuerzos en la matriz, del volumen de fracción y selección de los constituyentes en el módulo efectivos antiplano de composites bifásicos fibrosos magneto-electro-elásticos.....	97

5.2 Efecto de la interfase, de la distribución de los refuerzos en la matriz, del volumen de fracción y selección de los constituyentes en el módulo efectivo antiplano de compositos trifásicos fibrosos MEE	110
5.3 Efecto de la interfase en las propiedades efectivas antiplanas de compositos fibrosos trifásicos MEE	121
5.4 Efecto de la distribución de la porosidad en las propiedades efectivas MEE de compositos porosos	125
5.5 Influencia del galfenol como constituyente en el efecto de acoplamiento magnetoeléctrico..	127
5.6 Caso limite: Compositos piezoeléctricos	131
5.7 Compositos magneto-electro-elásticos tridimensionales	134
Conclusiones	136
Trabajos que resultaron de la investigación desarrollada.....	139
Artículos publicados en revistas indizadas.....	139
Trabajos presentados en congresos nacionales e internacionales.....	140
Referencias	141
Apéndice A.....	152
Apéndice B.....	152
Apéndice C.....	154
Apéndice D.....	155
Apéndice E	155
Apéndice F	160
Apéndice G.....	163
Apéndice H.....	164
Apéndice I	166
Apéndice J.....	171

Resumen

El presente trabajo de tesis está dedicado al cálculo de las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos magneto-electro-elásticos bifásicos (fibra/matriz) y trifásicos (fibra/interfase/matriz), con estructura periódica y cuyos elementos representativos del volumen son bidimensionales o tridimensionales. Se implementaron modelos micromecánicos analíticos y semi-analíticos (SAFEM) diferentes, basados en el método de homogeneización asintótica y en el método de los elementos finitos. En particular, se analiza la influencia del efecto de la interfaz entre las fibras y la matriz; del volumen de fracción de los refuerzos; de la distribución de los refuerzos en la matriz y de la selección de los materiales constituyentes en las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos magneto-electro-elásticos.

Para el análisis del efecto de la interacción entre las fibras y la matriz se formularon dos modelos analíticos: el *modelo de imperfección* (MHA – Imp) aplicado para la descripción de composites bifásicos con interfaz imperfecta entre los constituyentes y el *modelo de interfase* (MHA – 3F) aplicado para la descripción de composites trifásicos con una interfase existente entre las fibras y la matriz. En ambos modelos se consideraron elementos representativos del volumen en forma de paralelogramos. En el modelo MHA – Imp, las imperfecciones mecánica, eléctrica y magnética en la interfaz son modeladas como una idealización por medio de la existencia de un resorte, un capacitor y un inductor respectivamente. Las formulaciones analíticas derivadas para los problemas locales antiplanos y de las propiedades efectivas asociadas, derivados por MHA – Imp, MHA – 3F y SAFEM son explícitamente descritas, por lo cual, se pueden usar de forma eficiente para verificar la implementación de métodos experimentales, numéricos y modelos analíticos. La eficiencia de los modelos presentados MHA – Imp, MHA – 3F y SAFEM y la validación de los resultados obtenidos se demuestra mediante comparaciones con resultados obtenidos por otros modelos teóricos reportados en la literatura. Las formulas desarrolladas son, además, válidas para el análisis de las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos periódicos, bifásicos y trifásicos piezoeléctricos y elásticos con ERV bidimensional o tridimensional.

1. Introducción

Hoy en día, uno de los grandes desafíos a los que se enfrenta la comunidad científica es el desarrollar mejores dispositivos electrónicos y estructuras que cumplan con los nuevos requerimientos de la tecnología y que impulsen al desarrollo de la humanidad; por ejemplo: dispositivos inteligentes, sensores, actuadores, dispositivos de almacenamiento de energía, estructuras para las construcciones civiles, accesorios deportivos, entre otros (Emam and Inman, 2015; Gibson, 2010; Pereira et al., 2009; Safri et al., 2018; Shirbani et al., 2017).



Figura 1. Ejemplos de aplicaciones de compositos en la industria.

En este sentido, el advenimiento y desarrollo de los **compositos** ha contribuido potencialmente a la búsqueda de nuevos materiales por ingeniería directa de su microestructura (Jiang et al., 2004; Tadmor et al., 2000). Se ha comprobado que los compositos presentan considerables ventajas sobre los materiales tradicionales, o sea; se diseñan de manera que mejoran las propiedades de sus componentes preservando al mismo tiempo un nivel de funcionalidad comparable o mejorado (por ejemplo: peso más ligero, óptimas resistencias a la corrosión y a determinadas temperaturas en ambientes naturales, permiten la generación de estructuras con geometrías complejas, entre otras); e incluso, en

ocasiones, estos muestran nuevas **propiedades** que ninguno de sus componentes individualmente presentan, por ejemplo: los llamados efectos de acoplamiento entre propiedades de diferentes naturalezas. Entre los efectos de acoplamiento tenemos: el piezoeléctrico, el magnetostrictivo (piezomagnético) y el efecto magnetoeléctrico, entre otros (Fuentes et al., 2001; Jiang et al., 2004). Los campos de aplicaciones de los composites son muy amplios (Aized et al., 2017; Parandoush and Lin, 2017), por lo que los materiales estructurales son un ejemplo de un tema viejo que no deja de recibir atención (Hung et al., 2018; Safri et al., 2018).

Uno de los aspectos de importancia en el estudio del comportamiento de los composites, es tener en cuenta la interacción entre los refuerzos y la matriz. Se ha demostrado que esta región de interacción (*interfaz*) tiene un efecto significativo en las propiedades efectivas del composite. El debilitamiento de la interfaz puede producir un debilitamiento de las propiedades del mismo y afectar su eficiencia. Incluso, en ocasiones, durante el proceso de manufactura del composite puede ser modificada para mejorar sus propiedades o para proteger a los refuerzos de la interacción directa con la matriz, como una nueva fase intermedia (*interfase o mesofase*). Tener un control adecuado de la interfaz (o interfase) proporciona al composite un mejor rendimiento y una mejor integridad de su estructura; por lo tanto, entender sus efectos y los mecanismos de adhesión entre los refuerzos y la matriz ha sido objeto de numerosos estudios recientes (Dinzart and Sabar, 2011; Hashin, 2002; Kuo and Huang, 2016; Sevostianov et al., 2012; Shi et al., 2014; Wang and Pan, 2007).

Los modelos micromecánicos y la simulación numérica con base en la Mecánica de Sólidos han jugado un papel fundamental en el estudio teórico de los composites multifásicos. Su desarrollo ha fortalecido los mecanismos de comprensión, análisis y desarrollo de sistemas materiales heterogéneos, de sus diseños con propiedades y condiciones específicas, e incluso han permitido optimizar procesos de fabricación. Por ejemplo: los métodos auto-consistentes y auto-consistentes generalizados (Budiansky, 1965; Nan, 1994; Srinivas and Li, 2005; Tong et al., 2008; Xiao et al., 2016); los métodos diferenciales (Mclaughlin, 1977); el método de Mori-Tanaka (Benveniste, 1987, 1995; Li and Dunn, 1998; Mori and Tanaka, 1973; Srinivas et al., 2006) y los métodos de homogeneización (Bakhvalov and Panasenko, 1989; Benveniste and Dvorak, 1992; Bravo-Castillero et al., 2015; Camacho-Montes et al., 2006; Camacho-

Montes et al., 2009; Guinovart-Díaz et al., 2013; Rodríguez-Ramos et al., 2001; Sixto-Camacho et al., 2015), entre otros.

En particular, los métodos de homogeneización son útiles para la deducción de propiedades efectivas de composites elásticos, piezoeléctricos, piezomagnéticos, magnetoeléctricos, entre otros; basándose en el conocimiento del comportamiento de sus constituyentes, de las interfaces entre ellos y de las formas geométricas en que se disponen (López-Realpozo et al., 2017; Yan et al., 2013). Estos métodos, complementándose con las técnicas experimentales y viceversa, permiten que investigadores de Ciencias de los Materiales u otras ciencias tengan herramientas más eficientes para la predicción y comprensión de la relación estructura-propiedades y del comportamiento de los materiales compuestos y/o composites. Su utilidad es aprovechable en muchas áreas de esta ciencia y es aplicable a todo tipo de materiales, incluyendo cerámicos, polímeros y composites, metales y aleaciones, etc.

La propuesta de investigación de esta tesis doctoral está motivada por el interés fundamental de estudiar la influencia del efecto de la interfaz (interface) en las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos en los que el efecto de acoplamiento magnetoeléctrico esté presente. Estos materiales, llamados terminológicamente como sólidos magneto-electro-elásticos (MEE), son aquellos que exhiben un máximo acoplamiento entre los campos mecánicos, eléctricos y magnéticos. Aunque pocos materiales en la naturaleza poseen simultáneamente dichas propiedades de acoplamiento, estos han jugado un rol importante en dispositivos multifuncionales como sensores de campo magnético, sensores de corriente, cosechadoras de energía, transformadores, filtros magnetoeléctricos, celdas de memorias eléctricas, etc. Otros análisis, como la influencia del efecto del volumen de fracción de los refuerzos, de la distribución de los refuerzos en la matriz y de la selección de los constituyentes materiales en las propiedades efectivas, también son investigados. Para el análisis se proponen dos modelos diferentes que permiten el cálculo de las propiedades efectivas de composites fibrosos MEE basados en el método de homogeneización asintótica (MHA) y en el método de los elementos finitos (MEE). De esta manera, se desarrollará una nueva herramienta que ayude en el diseño de experimentos en búsqueda de nuevos composites cuyas propiedades sean las deseadas y estén optimizadas.

1.1 Antecedentes

En los últimos años, la estimación numérica de las propiedades efectivas de composites reforzados MEE ha sido una temática de investigación activa en la comunidad científica. Su enfoque se ha debido a la descripción micromecánica de la interacción de su microestructura y del efecto de acoplamiento magnetoeléctrico (ME) que estos presentan, así como, por la gama de utilidades que han tenido, producto a sus diversas aplicaciones. Composites, donde el efecto ME se ha producido, han sido aplicados en: dispositivos de procesamiento de señales de ondas (microondas u ondas milimétricas) de alta frecuencia útiles en radares, equipos de telecomunicación y en sistema de radio frecuencia; en sensores para la detención de campos magnéticos AC/DC (corriente alterna (AC) - corriente directa (DC)); como cosechadores de energía a través de la convención de vibraciones mecánicas y de campo magnéticos en electricidad, entre otras (Bichurin et al., 2017; Bichurin et al., 2002; Fetisov and Srinivasan, 2006; Fuentes-Cobas et al., 2015; Srinivasan et al., 2015; Wang et al., 2014a).

El efecto magnetoeléctrico en un material se le llama al efecto que surge de inducir magnetización por un campo eléctrico o viceversa, a la polarización eléctrica inducida por un campo magnético. En este efecto lineal, la magnetización es proporcional al campo eléctrico y la polarización es proporcional al campo magnético (O'Dell, 1970).

La historia del efecto ME data desde el siglo XIX, alrededor de 1894, cuando P. Curie en su famoso artículo “*On symmetry in physical phenomena*” sugiere la convención de energía producida entre los campos eléctrico y magnético. Además, Curie reconoce que el aspecto de la simetría es fundamental en este desarrollo de este tipo de energía (Curie, 1894; O'Dell, 1970). Sin embargo, no fue hasta 1957 que se mostró que el efecto lineal ME existiese en una cierta clase de cristales magnéticos basados en consideraciones de simetría de cristales (Landau and Lifshits, 1981) y finalmente, en 1959, Dzyaloshinskii mostró teóricamente que para el material antiferromagnético Cr_2O_3 este efecto se producía bajo la presencia de simetrías (Dzyaloshinskii, 1960).

La primera observación del efecto ME en un cristal simple de Cr_2O_3 fue confirmada por Astrov en 1960, obtenida mediante mediciones de la magnetización inducida por el campo

eléctrico establecido mediante electrodos (Astrov, 1960), y más tarde, en 1961, Rado y Folen mediante la detención de la polarización eléctrica inducida por el campo magnético (Rado and Folen, 1961). Estos fueron los dos primeros sistemas probados que mostraron el efecto de acoplamiento ME (O'Dell, 1970) .

Las primeras observaciones del efecto ME provocaron grandes expectativas debido al obvio potencial de la correlación entre las propiedades magnéticas y eléctricas de la materia para aplicaciones técnicas, desde entonces el efecto ME ha sido estudiado en monocristales, muestras policristalinas, en polvos de Cr_2O_3 , así como en materiales con diferentes estructuras: perovskita, pseudo-ilmenitas, en composiciones BaMeF_3 ($\text{Me} = \text{Mn, Fe, Co, Ni}$), Cr_2BeO_4 , $\text{A}_2\text{M}_4\text{O}_9$ ($\text{A} = \text{Ta, Nb; M} = \text{Co, Mn}$), entre otras. Estos resultados implicaron un paso muy importante en el estudio del efecto ME, pues hizo posible expandir el estudio a un número de materiales bien conocidos (Fischer et al., 1972; Hornreich, 1969, 1970, 1972; Hou and Bloembergen, 1965; Kambale et al., 2012; O'Dell, 1970; Ryu et al., 2002). Sin embargo, la mayoría de los materiales monofásicos que exhibían un efecto ME, con un orden a lo sumo de 20 mV/cm, lo hacían a bajas temperaturas e incluso muy por debajo de la temperatura ambiente. Estas condiciones implicaban que no eran buenos candidatos para aplicaciones de gran escala en la tecnología (Kambale et al., 2012).

La solución al problema de aumentar la respuesta magnetoeléctrica y superar el inconveniente de los materiales monofásicos fue encontrada en los compositos. Observaciones en compositos cuyas fases eran ferroeléctricas y ferri- o ferromagnéticas producían altos efectos ME como respuesta del propio acoplamiento e incluso se manifestaban a temperaturas mayores a la temperatura ambiente (Kambale et al., 2012; Nan et al., 2008; Van Suchtelen, 1972).

En los compositos, el efecto ME tiene su principio en la transferencia de energía entre fases magnetostrictivas (piezomagnéticas) y piezoeléctricas bajo presencia de un campo magnético aplicado. Es decir, la tensión inducida por el campo magnético en la componente magnetostrictiva (piezomagnética) se transfiere a la componente piezoeléctrica a través del acoplamiento elástico, resultando en un voltaje piezo-inducido y viceversa. En este sentido, los constituyentes piezomagnéticos cambian de estado producto al efecto de magnetostricción,

y esta tensión es transferida a la fase piezoeléctrica, resultando en un cambio de polarización eléctrica (Kambale et al., 2012). Aquí, la interacción con el acoplamiento elástico entre las fases antes mencionadas permite una alta respuesta magnetoeléctrica. Por lo tanto, este efecto ME deseado es una propiedad producto que surge de una adecuada combinación entre dos o más fases, tales como una combinación de fases piezomagnéticas y piezoeléctricas. En estos casos, el efecto ME obtenido producto del acoplamiento entre los campos eléctrico, magnético y mecánico es más fuerte que en los materiales monocristalinos piezoeléctricos o piezomagnéticos convencionales, e incluso en ocasiones el compuesto como un todo único puede ser considerado macroscópicamente como un material homogéneo de una sola fase magneto-electro-elástica, en el cual la propiedad magneto-eléctrica no está en sus fases constituyentes. Además, otros efectos secundarios son de esperar a partir de los cambios de permeabilidad o permitividad (Van Suchtelen, 1972). El efecto ME también se puede realizar mediante el acoplamiento de la interacción térmica en composites piroeléctricos-piromagnéticos (Ryu et al., 2002).

Los primeros reportes del efecto ME en composites fueron realizados por Van Suchtelen y colaboradores en los laboratorios de investigaciones Philips en Eindhoven, Holanda (Van den Boomgaard et al., 1974; Van den Boomgaard et al., 1976(a); Van den Boomgaard et al., 1976(b); Van Run et al., 1974; Van Suchtelen, 1972). En estos reportes, los composites bifásicos ME eran preparados por solidificaciones unidireccionales de una composición eutéctica (mezcla de dos componentes sólidos cuyo punto de fusión o punto de evaporización es más bajo que el que poseen sus componentes individualmente) de un sistema quinario Fe–Co–Ti–Ba–O, reportándose fundamentalmente el estudio del efecto ME de mezclas de titanato de bario BaTiO_3 y de ferrita de cobalto CoFe_2O_4 .

En 1978, Van den Boomgaard y Born presentaron las condiciones propias del efecto ME en composites teniéndose en cuenta: el equilibrio químico de las fases, el tamaño de los granos de cada constituyente, las propiedades piezoeléctricas y piezomagnéticas de cada constituyente, la estrategia de polarización, así como la conservación de las cargas acumuladas a través de los constituyentes. Igualmente, reportaron trabajos de composites ME sinterizados bajo el mismo sistema analizando el exceso de TiO_2 , el efecto del tamaño de las partículas, la

velocidad de enfriamiento y las relaciones molares entre ambos constituyentes. Destacándose además, los altos valores del coeficiente de voltaje ME en un orden de los $80 \text{ mV} / (\text{cm Oe})$ en compositos sinterizados de $\text{BaTiO}_3 - \text{Ni}(\text{Co, Mn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ (Van den Boomgaard and Born, 1978). Desde entonces y siguiendo las condiciones expuestas por Van den Boomgaard y Born en 1978 muchos compositos han sido reportados, tales como: $\text{BaTiO}_3 - \text{NiFe}_2\text{O}_4$, $\text{BaTiO}_3 - \text{MnFe}_2\text{O}_4$, $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$, $\text{LiFe}_5\text{O}_8 - \text{BaTiO}_3$, entre otros. También, se reportó el efecto ME en compositos formados por una ferrita NiZn y un cerámico PZT, así como, su dependencia sobre campos magnéticos aplicados (Bunget and Raetchi, 1981). En nuestros días, el interés en este tipo de composiciones aún se ha mantenido (Ge et al., 2017; Salazar-Kuri et al., 2017; Thankachan et al., 2018).

En las dos últimas décadas, producto a las nuevas aspiraciones tecnológicas de producir materiales multifuncionales como un aditamento único y a la tendencia de la miniaturización de dispositivos, han sido observados nuevos temas de interés relacionados con materiales en los que la combinación fundamental de propiedades eléctricas, magnéticas y otras, estén presentes. En este sentido, los compositos ME son muy atractivos debido a que, además de mostrar las propiedades intrínsecas de los constituyentes, estos ofrecen propiedades adicionales producto de los efectos de acoplamiento. Convirtiéndolos de esta manera, en buenos candidatos para un amplio campo de aplicaciones futuras.

En consecuencia, han sido reportados numerosos trabajos científicos donde nuevas técnicas experimentales y conceptos teóricos aplicados a la comprensión del efecto magnetoeléctrico en diversos tipos de compositos son analizados. Esto ha permitido, que el desarrollo de diferentes métodos micromecánicos o de simulación numérica junto a técnicas experimentales jueguen un papel fundamental en el estudio de compositos multifásicos con distintos modos de conectividad de las fases constituyentes (Newnham et al., 1978), así como en el interés del estudio de los fenómenos de acoplamiento, de los efectos de las interfaces y de la estimación de las propiedades efectivas (Aboudi, 2001; Bartkowska, 2015; Benveniste, 1995; Bichurin et al., 2010; Guinovart-Díaz et al., 2016; Li and Dunn, 1998; Nan et al., 2008; Nan et al., 2001; Sixto-Camacho et al., 2013; Sixto-Camacho et al., 2015; Wang et al., 2003).

En estos últimos años, un tema que ha sido considerado es el estudio de la influencia de la interfaz entre las fases constituyentes de composites MEE, debido a su complicada descripción y al efecto significativo que tiene sobre las propiedades efectivas del nuevo material y en particular en el efecto de acoplamiento ME. Lograr simular un comportamiento más real del composite idealizado y la forma de incluir los efectos causados en la interfaz es un tema de gran enfoque (Otero et al., 2014; Shi et al., 2016; Wang, 2015; Würkner et al., 2013; Xu and Xiao, 2016; Yan et al., 2013).

Algunos autores asumen los modelos de interfaz (tipo *linear spring*) considerando la existencia de discontinuidades de desplazamientos, esfuerzos, saltos de potenciales, entre otros en la interfaz. Por ejemplo: El efecto de interfaces imperfectas en piezoelectricidad es analizado basado en la formulación del tensor de Eshelby para un composite reforzado por partículas elipsoidales (Wang et al., 2014b). Kuo y Chen emplean transformaciones de desacoplamiento para predecir el comportamiento macroscópico de medios fibrosos bifásicos con fases constitutivas piezoeléctricas y piezomagnéticas, considerando además, dos imperfecciones mecánica y eléctrica en la interfaz (Kuo and Chen, 2015). Kuo y Huang estiman las propiedades efectivas de composites bifásicos fibrosos multiferroicos con interfaces imperfectas (tipo spring) mediante diferentes modelos micromecánicos (Kuo and Huang, 2016). Otero–Hernández modela la presencia de imperfecciones mecánicas, eléctricas y magnéticas por medio de muelles, un inductor y un capacitor, respectivamente (Otero et al., 2013b). Sixto-Camacho y colaboradores obtienen relaciones exactas explícitas para las propiedades efectivas antiplanas de composites MEE reforzados por fibras a través de las condiciones de compatibilidad de Milgrom-Shtrikman (Sixto-Camacho et al., 2015). Espinosa-Almeyda y colaboradores mediante el MHA analizan el efecto de las imperfecciones mecánicas, eléctricas y magnéticas ocurridas en la interfaz y de la distribución de fibras en la matriz en las propiedades efectivas antiplanas de composites periódicos MEE. Además, describen como la distribución de los refuerzos permiten dos tipos de comportamientos global del nuevo composite: monoclinico o transversalmente isotrópico (Espinosa-Almeyda et al., 2017b). Wang y colaboradores estudian bajo condiciones de esfuerzos pre-escritos en la frontera y con una interfaz imperfecta el efecto de acoplamiento ME para una clase de composites multiferroicos que contienen inclusiones esferoidales (Wang et al., 2017). Otros,

estudian la interfaz considerándola como una región activa (mesofase), tipo capa delgada entre la matriz y los refuerzos. Modelos multifásicos son reportados en trabajos referidos a composites cuyos refuerzos son: fibras circulares de múltiples capas (Kuo and Pan, 2011; Shi et al., 2016), fibras elípticas de múltiples capas (Kuo, 2011), cuyos refuerzos están recubiertos por una capa delgada (Dinzart and Sabar, 2011). Recientemente, Abderrahmane presentó una formulación generalizada del esquema diferencial desarrollado por McLaughlin en 1977 para predecir las propiedades efectivas de composites multifásicos MEE (Abderrahmane et al., 2016). Zhong y colegas analizan el efecto del espesor y la rigidez de los recubrimientos en la concentración de los esfuerzos y en las propiedades efectivas de composites MEE usando un método asintótico variacional sobre una celda unitaria homogeneizada (Zhong et al., 2015). El MHA a doble escala ha sido aplicado para estimar las propiedades efectivas de composites fibrosos trifásicos MEE considerando deformación plana (Guinovart-Díaz et al., 2013) y deformación antiplana (Espinosa-Almeyda et al., 2014). Otros como, Kuo y Peng en el 2013 y Wang y colaboradores en el 2015, usan un modelo micromecánico recursivo basado en el método de Mori-Tanaka para evaluar el efecto de la mesofase en los coeficientes de acoplamiento ME en composites cuyos constituyentes son piezoeléctricos y piezomagnéticos (Kuo and Peng, 2013; Wang et al., 2015). Hashemi desarrolla un esquema de homogeneización para determinar las propiedades efectivas MEE de composites periódicos multiferroicos con múltiples inhomogeneidades conformado por partículas elipsoidales con revestimientos múltiples elipsoidales (Hashemi, 2016). Algunas búsquedas y perspectivas históricas del desarrollo y estudio del efecto magnetoeléctrico han sido reportadas por (Bichurin et al., 2012; Fiebig, 2005; Fiebig and Spaldin, 2009; Fuentes et al., 2007; Nan et al., 2008).

Esta breve reseña del desarrollo de la investigación realizada sobre el efecto magnetoeléctrico muestra algunos de los principales resultados obtenidos por diferentes métodos teóricos y experimentales reportados. Con ella, se ofrece una idea del volumen de artículos publicados que existe, su creciente interés en el estudio del efecto magnetoeléctrico y pone en claridad nuevas perspectivas de investigación en el tema y la importancia de los composites magnetoeléctricos.

1.2 Definición del problema

En el desarrollo de composites fibrosos magneto-electro-elásticos, el entendimiento y análisis de su microestructura, de los fenómenos de interacción entre sus constituyentes y de las propiedades productos que se disponen es crucial para obtener un mejor comportamiento macroscópico del composite y a su vez un uso satisfactorio ante los requerimientos óptimos de sus futuras aplicaciones. En este sentido, una temática de interés y motivación en esta tesis doctoral es

El estudio del fenómeno de la imperfección en la interfaz entre los constituyentes de composites magneto-electro-elásticos y su influencia en las propiedades efectivas

Para su solución se propone un modelo matemático basado en la Mecánica de Medios Continuos que nos permita determinar las propiedades efectivas de estos composites bajo condiciones de contacto imperfecto en la interfaz a partir de elementos representativos del volumen (ERV) del composite.

En esta propuesta doctoral, se presentan dos modelos fundamentales que describen la interfaz y que permiten el estudio del fenómeno de la imperfección en composites fibrosos MEE (un modelo de contacto imperfecto y un modelo trifásico). Para la solución de ambos modelos se proponen dos métodos diferentes, uno totalmente analítico y el otro semi-analítico, basados en el método de homogeneización asintótica y en el método de los elementos finitos. Los resultados obtenidos servirán para una primera validación de los métodos aplicados.

El propósito de esta tesis consiste en obtener un acercamiento entre la implementación de los métodos micromecánicos y los resultados experimentales a través del desarrollo de una nueva herramienta matemática que ayude en el diseño de experimentos en búsqueda de nuevos composites cuyas propiedades sean las deseadas y estén optimizadas, y sean posibles de obtener en un número razonable de experimentos.

1.3 Originalidad y Justificación

Con la presente tesis se propone desarrollar una nueva herramienta, a través de métodos micromecánicos y de simulación con base en el MHA y en el MEF, que ayude en el diseño de experimentos en búsqueda de nuevos materiales, donde el coeficiente de acoplamiento ME esté optimizado y sea posible de obtener con un número razonable de experimentos. Con ella se pretende, además, lograr una aplicación práctica basada en las técnicas micromecánicas a favor de la Ciencia de los Materiales, y así; desarrollar nuevos instrumentos que ayuden a la interpretación y entendimiento del funcionamiento de los materiales magnetoeléctricos.

La originalidad de este trabajo se basa principalmente en:

- i) El desarrollo de una nueva herramienta que ayude en el diseño de experimentos en búsqueda de nuevos materiales donde el coeficiente ME esté optimizado.
- ii) La predicción mediante modelos micromecánicos y de simulación numérica basados en el MHA y MEF de las propiedades efectivas de composites MEE provistos de estructuras periódicas reforzados por fibras circulares.
- iii) La descripción de la influencia de la interfaz en las propiedades efectivas asociadas a los problemas locales correspondientes al problema de la magneto-electro-elasticidad lineal.
- iv) La descripción de la influencia de la distribución de los refuerzos fibrosos, materiales constituyentes y volúmenes de fracción en las propiedades efectivas del composite MEE.
- v) El desarrollo de un modelo semi-analítico con la posibilidad de representar composites con variados tipos de estructuras.

1.4 Hipótesis

Es posible describir numéricamente el efecto de la interfaz y la distribución de los refuerzos sobre las propiedades efectivas de composites MEE mediante un método híbrido entre MHA–MEF

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Generar un modelo semi-analítico basado en el método de homogeneización asintótica y el método de los elementos finitos para apoyar el diseño óptimo de composites magneto-electro-elásticos.

1.5.2 Objetivos específicos

- Desarrollar un modelo analítico basado en el método de homogeneización asintótica que permita el cálculo de propiedades efectivas antiplanas magneto-electro-elásticas de composites bifásicos reforzados por fibras bajo la presencia de contacto imperfecto entre los constituyentes.
- Generar un modelo analítico basado en el método de homogeneización asintótica que permita el cálculo de propiedades efectivas antiplanas magneto-electro-elásticas de composites trifásicos fibrosos.
- Confeccionar un modelo semi-analítico basado en el método de homogeneización asintótica y en el método de los elementos finitos para el cálculo de propiedades magneto-electro-elásticas de composites reforzados por fibras.

- Desarrollar la capacidad de modelación numérica mediante el método de los elementos finitos para calcular las propiedades efectivas magneto-electro-elásticas a partir de elementos representativos del volumen obtenidos experimentalmente.

2. Fundamentos de la mecánica de materiales compuestos. Ecuaciones fundamentales

2.1 Compositos

Un composito o material compuesto se puede definir como la combinación debidamente dispuesta de dos o más materiales (llamados constituyentes) con propiedades físicas diferentes, e insolubles entre sí, que se unen sinérgicamente por medio de una mezcla, manteniendo íntegro cada componente para conformar un nuevo material. Este nuevo material puede constar de una matriz y otro u otros reforzantes (refuerzos), los cuales están determinados por una proporción entre ellos para obtener características y propiedades específicas y pueden identificarse físicamente gracias a la interfaz que existe entre ellos.

Los compositos se describen de acuerdo a la conectividad entre sus constituyentes como: reforzados por partículas (Kuo and Kuo, 2012; Priya et al., 2007), laminados (Buchanan, 2004; Chen et al., 2002; Ryu et al., 2001; Sreenivasulu et al., 2012; Yang et al., 2015) fibrosos (Berger et al., 2005; Harshe et al., 1993; Lee et al., 2005; Wu and Huang, 2000), porosos (Petrov et al., 2007), películas delgadas (nanoestructurados (Nan et al., 2005; Wang et al., 2010; Zheng et al., 2004)), entre otros.

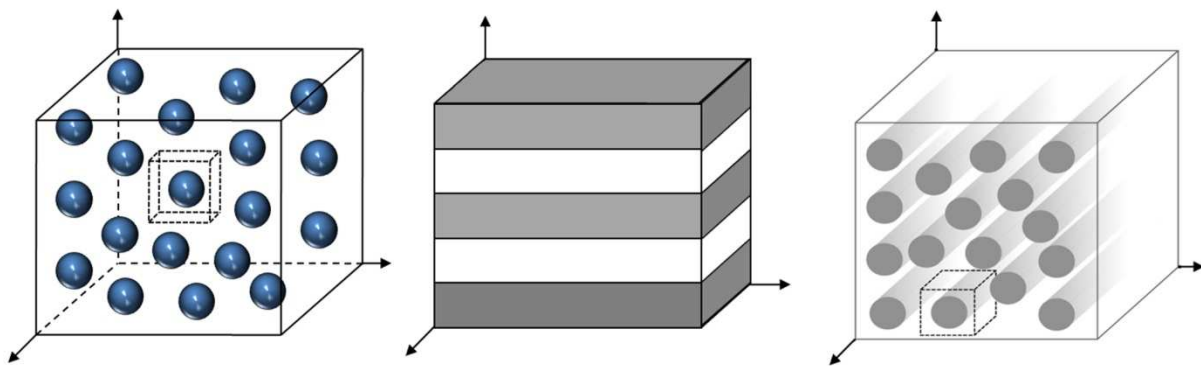


Figura 2. Ejemplos de compositos: a) reforzados por partículas b) laminados c) fibrosos

En los compositos, la base de su superioridad radica fundamentalmente, desde el punto de vista estructural, en sus propiedades efectivas y en la naturaleza heterogénea y anisótropa

de sus constituyentes. No obstante, aunque estas últimas características pueden verse como una desventaja, ya que para su estudio, se requiere de un análisis más complejo que para compositos isotrópicos y homogéneos convencionales, éstas proporcionan una mayor libertad para el diseño y una configuración óptima de nuevos compositos. En los compositos, en general, las heterogeneidades se presentan en escalas de longitud que son mucho más grandes que la escala atómica; sin embargo, son esencialmente homogéneos a escala macroscópica o al menos alguna escala intermedia. Su comportamiento global depende fuertemente del comportamiento de los constituyentes (propiedades y estructuras geométricas), de la distribución de los refuerzos en la matriz, de la fracción volumétrica de cada fase constitutiva, así como, de los fenómenos ocurridos en la escala de análisis (es decir; fenómenos de acoplamientos, de interfaz, entre otros).

En este sentido, tres escalas de análisis (la nanoescala, la micro o mesoescala y la macroescala) han sido abordadas para el estudio de los compositos a partir de la Mecánica de Medios Continuos. El estudio de sus propiedades efectivas ha sido llevado a cabo en cada una de estas escalas mediante métodos micromecánicos, de simulación y/o experimentales aunque lo más recurrente es el desarrollo de métodos híbridos que permitan relacionar las propiedades a través de las diferentes escalas de análisis.

2.2 Elementos representativos del volumen

En el estudio de los compositos, definir apropiadamente un **elemento representativo del volumen** (ERV) o **celda unitaria** (CU) a partir de la microestructura del composito es de gran importancia. El ERV se considera como un volumen v de material heterogéneo que constituye como un todo una parte estadísticamente representativa del composito, es decir, una muestra de todas las heterogeneidades microestructurales que se producen en el composito.

Para el análisis de los compositos el ERV considerado debe contener suficiente información sobre la microestructura y ser una buena representación del continuo. Además, su longitud característica debe ser lo suficientemente apropiada en comparación con el tamaño de la microestructura para que represente el comportamiento general del composito en una buena manera; sin embargo, debe ser mucho menor que el cuerpo macroscópico (Hashin, 1983).

En la deducción de las propiedades efectivas de composites, seleccionar un adecuado ERV que represente todas las características físicas y geométricas de las fases constitutivas del composite, es necesario y suficiente. En consecuencia, dos maneras de representar al composite mediante un ERV se consideran: i) como un ERV unitario o celda unitaria en una microestructura periódica o ii) como un volumen que contiene un conjunto suficientemente grande de elementos de la microescala que posea propiedades estadísticamente homogéneas y ergódicas (Kari, 2007).

En este trabajo, composites reforzados por fibras son representados mediante arreglos bi- o tridimensionales a través de ERVs unitarios y periódicos que reúnen en sí todas las propiedades físicas y geométricas del composite de interés. Esta consideración es fundamental, ya que permite que varios métodos micromecánicos puedan ser empleados con eficiencia, entre ellos, el MHA y el MEF.

2.3 Ecuaciones fundamentales de la magneto-electro-elasticidad lineal

En este trabajo, se considera un medio MEE que ocupa una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, con frontera cerrada $\partial\Omega$ y volumen V que representa a un composite sólido fibroso, periódico y heterogéneo, definido en el sistema cartesiano de coordenadas $\{x_1, x_2, x_3\}$ y origen O , el cual exhibe un máximo acoplamiento lineal entre deformaciones mecánicas y los campos eléctrico y magnético. Para los composites MEE, las ecuaciones constitutivas que lo describen en un medio Ω se pueden describir como (Nan, 1994):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k - q_{kij} H_k, \quad (2.1)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \kappa_{ik} E_k + \alpha_{ik} H_k, \quad (2.2)$$

$$B_i = q_{ikl} \epsilon_{kl} + \alpha_{ik} E_k + \mu_{ik} H_k, \quad (2.3)$$

expresiones que describen una relación lineal, descrita por componentes, entre el tensor de esfuerzos de segundo orden σ y los vectores de desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ y de inducción magnética $\mathbf{B}$ con el tensor de deformación de segundo orden ϵ y los campos vectoriales eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$. En las Ecs. (2.1) – (2.3), se representan como: C_{ijkl} a las

componentes del tensor de rigidez de cuarto orden considerando constantes los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$, e_{kij} a las componentes del tensor piezoeléctrico de tercer orden, medido a campo magnético $\mathbf{H}$ constante, q_{kij} a las componentes del tensor piezomagnético de tercer orden, medido a campo eléctrico $\mathbf{E}$ constante, κ_{ik} a las componentes del tensor de permitividad eléctrica de segundo orden medido a deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y a campo magnético $\mathbf{H}$ constantes, α_{ik} a las componentes del tensor magnetoeléctrico de segundo orden, medido a deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ constante y μ_{ij} a las componentes del tensor de permeabilidad magnética de segundo orden, medido a deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y campo eléctrico $\mathbf{E}$ constantes. Los subíndices i, j, k, l recorren los valores 1, 2, 3. La suma de Einstein para índices repetidos está implícita.

De la Ec. (2.1), se infiere que un cuerpo MEE se encuentra en un estado de esfuerzo excitado si está deformado o se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico o magnético. En la Ec. (2.1), el primer sumando está relacionado con el aporte mecánico, el segundo con el aporte electro-mecánico y el tercero con el aporte magnetostrictivo del cuerpo MEE. De la Ec. (2.2), se deduce que el desplazamiento eléctrico es causado por deformaciones o por la influencia del campo eléctrico o magnético. En la Ec. (2.2) el primer sumando caracteriza el efecto electro-mecánico, el segundo se asocia con un efecto puramente eléctrico y el tercero con un efecto magnetoeléctrico. En la Ec. (2.3), se induce cómo el flujo magnético es originado por deformaciones o por el efecto del campo eléctrico o magnético. En la Ec. (2.3), el primer sumando describe el efecto magnetostrictivo, el segundo es asociado al efecto magnetoeléctrico y el tercero con un efecto puramente magnético.

Por otra parte, de acuerdo a la Teoría de la Elasticidad lineal aplicada a medios continuos, se conoce que las deformaciones lineales, en pequeñas deformaciones, pueden ser escritas en términos del vector de desplazamiento $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ mediante la relación de Cauchy (Saad, 2005),

$$\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k}) / 2, \quad (2.4)$$

y que la ecuación dinámica de equilibrio mecánico se define mediante la ecuación

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2, \quad (2.5)$$

siendo X_i las componentes de las fuerzas másicas que actúan sobre el cuerpo y ρ es la densidad del medio. En lo adelante, la notación $(f)_{,j} \equiv \partial f / \partial x_j$ representa la derivada parcial de f con respecto a la componente j -ésima de la variable correspondiente.

Además, de la teoría electrodinámica para una aproximación cuasi-estática, en ausencia de cargas eléctricas ($\rho_c = 0$) y densidades de corriente eléctrica ($J = 0$), las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético resultan:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

y las correspondientes relaciones entre los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$ y sus respectivos potenciales eléctrico ϕ y magnético ψ están dadas por componentes como sigue:

$$E_k = -\phi_{,k}, \quad H_k = -\psi_{,k}. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, si se consideran la ecuación de equilibrio mecánico Ec. (2.5) y las divergencias Ecs. (2.7) y (2.9), si se asume que el problema en estudio es estático ($\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 \approx 0$) y que hay ausencia de las fuerzas másicas que actúan sobre el cuerpo (X_i nulas), resultan las divergencias:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad (2.11)$$

y finalmente, si combinamos la Ec. (2.11) con las Ecs. (2.1) – (2.10) se obtienen las ecuaciones diferenciales que describen al acoplamiento MEE en función de los desplazamientos y de los potenciales eléctricos y magnéticos en Ω :

$$(C_{ijkl} u_{l,k} + e_{kij} \phi_{,k} + q_{kij} \psi_{,k})_{,j} = 0, \quad (2.12)$$

$$(e_{kij} u_{i,k} - \kappa_{jk} \phi_{,k} - \alpha_{jk} \psi_{,k})_{,j} = 0, \quad (2.13)$$

$$(q_{kil} u_{i,k} - \alpha_{jk} \phi_{,k} - \mu_{jk} \psi_{,k})_{,j} = 0. \quad (2.14)$$

Las Ecs. (2.12) – (2.14), constituyen el sistema de ecuaciones fundamentales asociado a

la teoría de la magneto-electro-elasticidad lineal para una estructura heterogénea y periódica definida en un medio magneto-electro-elástico Ω . Siendo $\mathbf{u}$, ϕ y ψ la solución del problema de contorno fuerte cuasi-estático representado, sujeto a las condiciones de frontera

$$\sigma_{ij}n_j|_{\partial\Omega} = F_i^0, \quad D_i n_i|_{\partial\Omega} = -Q, \quad B_i n_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0, \quad \phi|_{\partial\Omega} = \phi_0, \quad \psi|_{\partial\Omega} = \psi_0, \quad (2.16)$$

siendo $\mathbf{u}_0$, ϕ_0 y ψ_0 funciones infinitamente diferenciales en Ω que representan a los desplazamientos y a los potenciales eléctricos y magnéticos superficiales. F_i^0 y Q representan a las componentes de las fuerzas y las cargas eléctricas superficiales respectivamente. Las n_i son las componentes del vector normal unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. En la formulación descrita en Ecs. (2.12) – (2.16) las propiedades materiales son funciones periódicas y dependientes de la posición global $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Además, satisfacen las propiedades de simetría

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad q_{kij} = q_{kji}, \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ y } \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad (2.17)$$

y de elipticidad

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}^3 \quad C_{ijkl}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\varepsilon}) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq c |\boldsymbol{\varepsilon}|^2, \quad \exists c_1 > 0 \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \kappa_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\varepsilon}) a_i a_j \geq c_1 |\mathbf{a}|^2, \\ \exists c_2 > 0 \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \mu_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\varepsilon}) b_i b_j \geq c_2 |\mathbf{b}|^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Siendo c , c_1 y c_2 constantes reales positivas para cualquier $\mathbf{x} \in \Omega$ y $\mathbb{E}^3$ es el espacio de las matrices simétricas de tercer orden.

2.4 La interacción entre los constituyentes

Uno de los aspectos importantes para estudiar el comportamiento global de los composites fibrosos, es tener en cuenta la interacción entre los refuerzos y la matriz. En muchos casos, las condiciones de la interacción entre los refuerzos y la matriz son uno de los factores más importantes en el análisis y control de las propiedades de los composites. Su debilitamiento puede provocar un debilitamiento de las propiedades del composite y afectar su eficiencia, por ejemplo: puede afectar su respuesta mecánica, electromecánica y magnetoeléctrica, entre otras. Aunque además, el debilitamiento de las propiedades puede

estar afectado por la porosidad del compuesto, así como, por las afectaciones que sufren los refuerzos al ser sometidos a diferentes tratamientos (estiramientos, compresiones u otros) a diferentes temperaturas (Espinosa-Almeyda et al., 2011).

La región de interacción entre los refuerzos y la matriz puede constituirse por una capa débil o lámina fina que se forma debido a la unión imperfecta entre dos fases adyacentes (Figura 3). También, puede representarse por una interfase introducida durante el proceso de manufactura del compuesto para mejorar las propiedades del mismo, o para proteger a los refuerzos de la interacción directa con la matriz, o para representar el efecto de los daños ocurridos durante la interacción. En este caso, el compuesto puede analizarse como un material trifásico donde la nueva fase intermedia estaría determinada por las propiedades de sus constituyentes y del grosor que se le asigne (Figura 4) (Espinosa-Almeyda et al., 2011; Espinosa-Almeyda et al., 2014; Hashin, 2002; López-Realpozo, 2012).

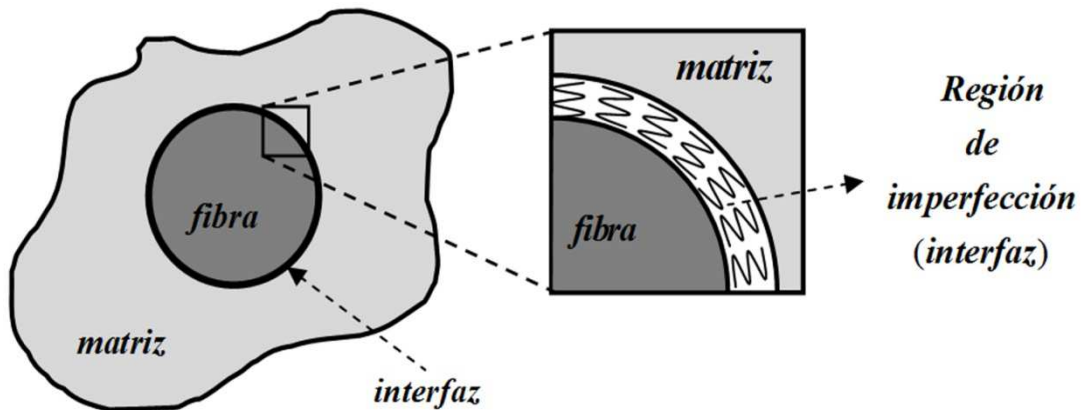


Figura 3. Idealización de la interfaz en un compuesto fibroso como una región de contacto imperfecto de tipo resorte para un compuesto bifásico (spring model).

En el análisis de la interacción refuerzos-matriz, las energías transferidas entre los constituyentes dependen en buena medida y a su vez son determinadas por el grado y tipo de contacto en la interfaz. Por tal motivo, desarrollar modelos micro-mecánicos que simulen el comportamiento real de los compuestos y de los efectos provocados en la interfaz es una necesidad fundamental para el estudio de los mismos (Aboudi, 1991; López-Realpozo, 2012)

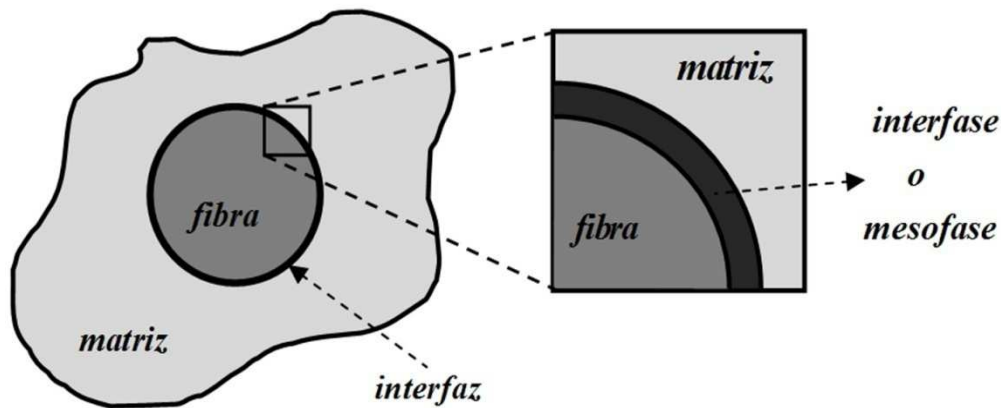


Figura 4. Idealización de la interfaz en un compuesto fibroso como una interfase o mesofase en un compuesto trifásico (three-phase model).

En la literatura, dos descripciones fundamentales son consideradas para el análisis de la región de interacción entre los refuerzos y la matriz. La primera hace referencia a una zona de contacto entre los constituyentes (llamada **interfaz** (en Inglés: *Interface*)), mientras que la segunda alude a una región que se crea entre los constituyentes (llamada **interfase o mesofase** (en Inglés: *Interphase*)) producto de diversas causas, de forma accidental o provocada por el diseño del compuesto. Una unión perfecta o interfaz perfecta es una idealización que puede ser inadecuada para la descripción de la naturaleza física y el comportamiento mecánico de esta región. Sin embargo, una unión imperfecta entre los constituyentes es una situación compleja más real caracterizada por porosidades, micro-grietas que surgen debido a cargas térmicas y/u otras anomalías que podrían describir más exactamente la condición en la interfase. Por lo tanto, la complicada descripción de la interfaz sigue motivando a la necesidad de introducir nuevos enfoques teóricos simplificados que simulen el comportamiento real de composites idealizados, así como, los efectos causados en la interacción refuerzos-matriz durante la fabricación de un nuevo compuesto (Espinosa-Almeyda et al., 2017b; Jasiuk and Tong, 1989; Otero et al., 2014; Wang and Pan, 2007; Würkner et al., 2013).

En el estudio del efecto de una interfaz imperfecta entre los refuerzos y la matriz, lo más común planteado, es que las condiciones de contacto imperfecto se determinen por parámetros de imperfección que representan el grado de adhesión en las direcciones normales y tangenciales de la interfaz. En general, la existencia de discontinuidades de los

desplazamientos y/o esfuerzos sobre la interfaz es representada por leyes lineales y no lineales, en términos de los parámetros constantes de imperfección de tipo resorte (el modelo que lo caracteriza se conoce como modelo de contacto imperfecto de tipo resorte (*Spring model*)). La idealización del contacto perfecto, así como la desaparición de las interfaces y, por tanto, el desacople del composito se obtienen como casos particulares para diferentes valores de estos parámetros de imperfección (ver Figura 3) (Benveniste, 1985; Hashin, 1990, 1991a, b; Jasiuk and Tong, 1989; Kuo and Huang, 2016; López-Realpozo, 2012; Wang et al., 2005; Wang and Pan, 2007).

En el presente trabajo, dos modelos se desarrollan para ilustrar la influencia del efecto de la interfaz en las propiedades efectivas de compositos fibrosos en los que el efecto de acoplamiento ME esté presente. El primero, un *modelo bifásico con contacto imperfecto o modelo de imperfección*, en el cual se describe una interfaz perfecta o imperfecta entre los refuerzos y la matriz (ver Figura 3). El segundo, un *modelo trifásico o modelo de interfase*, donde la presencia de una región activa, como una interfase o mesofase, entre los refuerzos y la matriz exista (ver Figura 4). Esta última representación (modelo trifásico) es una real y excelente aproximación para el análisis de los fenómenos complejos que pueden ocurrir en la región de interacción. Además, es útil para caracterizar a compositos bifásicos bajo consideración de contacto imperfecto entre los refuerzos y la matriz y permite extender la temática de estudio a nuevos compositos (Hashemi, 2016; Hashin, 1991a, 2002; Wang et al., 2005; Yan et al., 2013; Zhong et al., 2015).

2.4.1 Condiciones sobre la interfaz: modelo bifásico con contacto imperfecto o modelo imperfecto

En el *modelo bifásico con contacto imperfecto o modelo de imperfección*, para el análisis de la interfaz, el medio Ω , MEE, se describe como un composito fibroso bifásico (fibra/matriz) y periódico de manera tal que existen condiciones de contacto imperfecta en toda la región de interacción entre las dos fases adyacentes S_γ ($\gamma=1,2$), denotada por Γ . En este modelo, se tiene en cuenta la descripción formal reportada por Wang y Pan (2007) sobre la interfaz imperfecta para compositos MEE. Aquí, condiciones de contacto imperfecto

mecánico, eléctrico y magnético son consideradas simultáneamente entre los refuerzos fibrosos y la matriz, es decir: *Las componentes normales de los esfuerzos, del desplazamiento eléctrico y del flujo magnético son continuas pero los desplazamientos y los potenciales eléctricos y magnéticos son discontinuos a través de la interfaz. Los saltos de los desplazamientos y de los potenciales eléctricos y magnéticos son proporcionales, en términos de parámetros de imperfección, a las componentes normales de los esfuerzos, del desplazamiento eléctrico y del flujo magnético, respectivamente* (Espinosa-Almeyda et al., 2017b; Espinosa-Almeyda et al., 2011; Wang and Pan, 2007).

Las imperfecciones definidas en Γ son una generalización natural del modelo de tipo resorte (“*the linear spring layer model*”). Se representan por medio de un resorte, un capacitor y un inductor respectivamente y se miden en términos de un factor lineal de tipo resorte $\hat{K}$, de un parámetro $\hat{M}$ (físicamente: la capacitancia, considerando la interfaz como un capacitor) y de un parámetro $\hat{N}$ (físicamente: la inductancia, considerando la interfaz como un inductor) a través de las relaciones:

$$[[\sigma_{ij} n_j]] = 0, \quad [[D_i n_i]] = 0, \quad [[B_i n_i]] = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.19)$$

$$\sigma_{ij}^{(\gamma)} n_j^{(\gamma)} = (-1)^{\gamma+1} \hat{K} [[u_i]], \quad D_i^{(\gamma)} n_i^{(\gamma)} = (-1)^\gamma \hat{M} [[\phi]], \quad B_i^{(\gamma)} n_i^{(\gamma)} = (-1)^\gamma \hat{N} [[\psi]], \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.20)$$

En las Ecs. (2.19) y (2.20) las combinaciones de los parámetros no negativos $\hat{K}$, $\hat{M}$ y $\hat{N}$ identifican todos los posibles tipos de imperfecciones existentes sobre la interfaz. Una interfaz perfecta o contacto perfecto entre las fases se corresponde con valores de $\hat{K}$, $\hat{M}$ y $\hat{N}$ infinitamente grandes simultáneamente y la interpretación física de un desacople o ruptura total del composito es concebida cuando $\hat{K} = \hat{M} = \hat{N} = 0$ (Espinosa-Almeyda, et al. 2011). La notación $f^{(\gamma)}$ denota que la función f está definida en el medio γ con $\gamma=1, 2$. $[[f]] = f^{(1)} - f^{(2)}$ describe el salto de la función f a través de la interfaz tomada desde la matriz $f^{(1)}$ hasta la fibra $f^{(2)}$. Las n_i son las componentes del vector normal sobre la interfaz Γ .

2.4.2 Condiciones sobre la interfaz: modelo trifásico o modelo de interfase

En el *modelo trifásico o modelo de interfase*, para el análisis de la interfaz, el medio Ω se describe como un compuesto fibroso trifásico (fibra/interfase/matriz) y periódico, de manera tal que existen condiciones de contacto perfectas en toda la región de interacción entre las fases adyacentes fibra/interfase Γ_1 e interfase/matriz Γ_2 , es decir: A lo largo de cada interfaz Γ_s ($s=1,2$), las componentes normales de los esfuerzos, del desplazamiento eléctrico y del flujo magnético, así como, los desplazamientos, y los potenciales eléctricos y magnéticos son continuos a través de la interfaz. Por lo tanto, las condiciones de contacto perfecto se definen a través de las siguientes relaciones como:

$$[[\sigma_{ij} n_j]]_s = 0, \quad [[D_i n_i]]_s = 0, \quad [[B_i n_i]]_s = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_s \quad (2.21)$$

$$[[u_i]]_s = 0, \quad [[\phi]]_s = 0, \quad [[\psi]]_s = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_s \quad (2.22)$$

En las Ecs. (2.21) y (2.22), la notación $[[f]]_s = 0$ describe el salto de la función f a través de la interfaz Γ_s , o sea: $[[f]]_1 = f^{(1)} - f^{(2)}$ en Γ_1 , y $[[f]]_2 = f^{(2)} - f^{(3)}$ en Γ_2 . En la literatura, existen muchos trabajos que desarrollan diferentes modelos de interfases para el estudio de las inclusiones recubiertas en composites trifásicos o multifásicos elásticos, piezoeléctricos y MEE, entre otros (Hashemi, 2016; Hashin, 1990; Kuo and Pan, 2011; Sladek et al., 2017; Xu and Xiao, 2016).

2.5 Problemas de deformación plana y antiplana

En el estudio de las propiedades efectivas de los composites, la realidad física que los describe mediante la mecánica de sólidos es tridimensional. Sin embargo, obtener soluciones aproximadas mediante la reducción del número de variables que lo describen y en consecuencia, de las dimensiones del mismo es una solución factible y práctica para el análisis de los mismos. Por lo tanto, aplicar condiciones teóricas que representen las relaciones de esfuerzo-deformación y que permitan su descripción estructural en dependencia del grado de anisotropía es útil para obtener una mejor y aceptable descripción del sólido analizado. La

aproximación obtenida de la solución será mucho mejor cuanto más nos ajustemos a la configuración del problema a resolver. En este trabajo, en aras de simplificar el análisis de las propiedades efectivas de composites MEE en relación a la geometría representada, una generalización al caso MEE de los estados de deformación plana y antiplana de la Teoría de la Elasticidad lineal es considerada, de manera que:

a) Un cuerpo sólido está en estado de deformación plana, en un plano paralelo al plano X_1X_2 , y con campos eléctricos y magnéticos antiplanos perpendiculares al plano X_1X_2 , si se cumple lo siguiente:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad \text{y} \quad u_3 = u_3(x_1, x_2) \equiv 0, \quad (2.23)$$

$$\phi = \phi(x_1, x_2), \quad \psi = \psi(x_1, x_2), \quad (2.24)$$

es decir, si en todos los puntos del sólido el desplazamiento en la dirección x_3 es nulo, y además, los desplazamientos u_1 y u_2 , y los potenciales ϕ y ψ son independientes de la coordenada x_3 .

El otro estado, que es de interés especial para el estudio desarrollado (Camacho-Montes et al., 2009; Nemat-Nasser and Hori, 1993), asume que:

b) Un cuerpo sólido está en estado de deformación antiplana, perpendicular a un plano paralelo al plano X_1X_2 y con campos eléctricos y magnéticos planos paralelos al plano X_1X_2 , si se satisface:

$$u_1(x_1, x_2) \equiv 0, \quad u_2(x_1, x_2) \equiv 0 \quad \text{y} \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad (2.25)$$

$$\phi = \phi(x_1, x_2), \quad \psi = \psi(x_1, x_2), \quad (2.26)$$

es decir, si en todos los puntos del sólido los desplazamientos en las direcciones x_1 y x_2 son nulos, y además, el desplazamiento u_3 es independiente de la coordenada x_3 .

2.6 Sistemas cristalinos y Redes de Bravais

En el estudio de los composites periódicos la implicación del efecto de la simetría estructural sobre las propiedades macroscópicas del composite es un punto fundamental. Por

lo que, conocer la estructura cristalina de los mismos es de utilidad para poder entender los distintos tipos de materiales, y por ende, el comportamiento de sus propiedades.

Los materiales sólidos cristalinos se pueden clasificar de acuerdo a su estructura periódica, es decir, de acuerdo a la regularidad con que se sitúan los átomos o iones, unos respecto de otros. La distribución atómica en sólidos cristalinos puede describirse mediante una red espacial determinada unívocamente por un sistema de coordenadas donde se especifican las posiciones atómicas por medio de una celda unitaria que se repite y que posee las propiedades del material correspondiente, llamadas Redes de Bravais. Tales sistemas de coordenadas se conocen como: Sistemas cristalinos.

Los sistemas cristalinos se diferencian entre sí por las longitudes de los vectores básicos $\{a_1, a_2, a_3\}$, así como por los ángulos entre ellos. La base determinada por $\{a_1, a_2, a_3\}$ se conoce como base cristalográfica. Las características de los sistemas cristalinos se resume en la Tabla 1.

Sistemas cristalinos	Base cristalográfica
Triclínico	$a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
Monoclínico	$a_1, a_2, a_3, \alpha_2 \neq 90^\circ = \alpha_1 = \alpha_3$
Ortorrómbico	$a_1, a_2, a_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$
Tetragonal	$a_1 = a_2, a_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$
Romboédrica (Trigonal)	$a_1 = a_2 = a_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 90^\circ$
Hexagonal	$a_1 = a_2, a_3, \alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ, \alpha_3 = 120^\circ$
Cúbico	$a_1 = a_2 = a_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$

Tabla 1. Sistemas cristalinos

En los sistemas cristalinos la base y su celda unitaria se denotan primitivas si les corresponde un volumen mínimo entre aquellas cuya repetición generan al cristal. En el espacio tridimensional existen en total catorce tipos de celdas y redes diferentes por su geometría (Redes de Bravais) definidas a partir de los ángulos entre ejes, la magnitud de los vectores básicos y la centralización. En la Figura 5 se representan de manera gráfica las Redes de Bravais. Aquí, P denota una celda primitiva o simple en la que los puntos reticulares solo

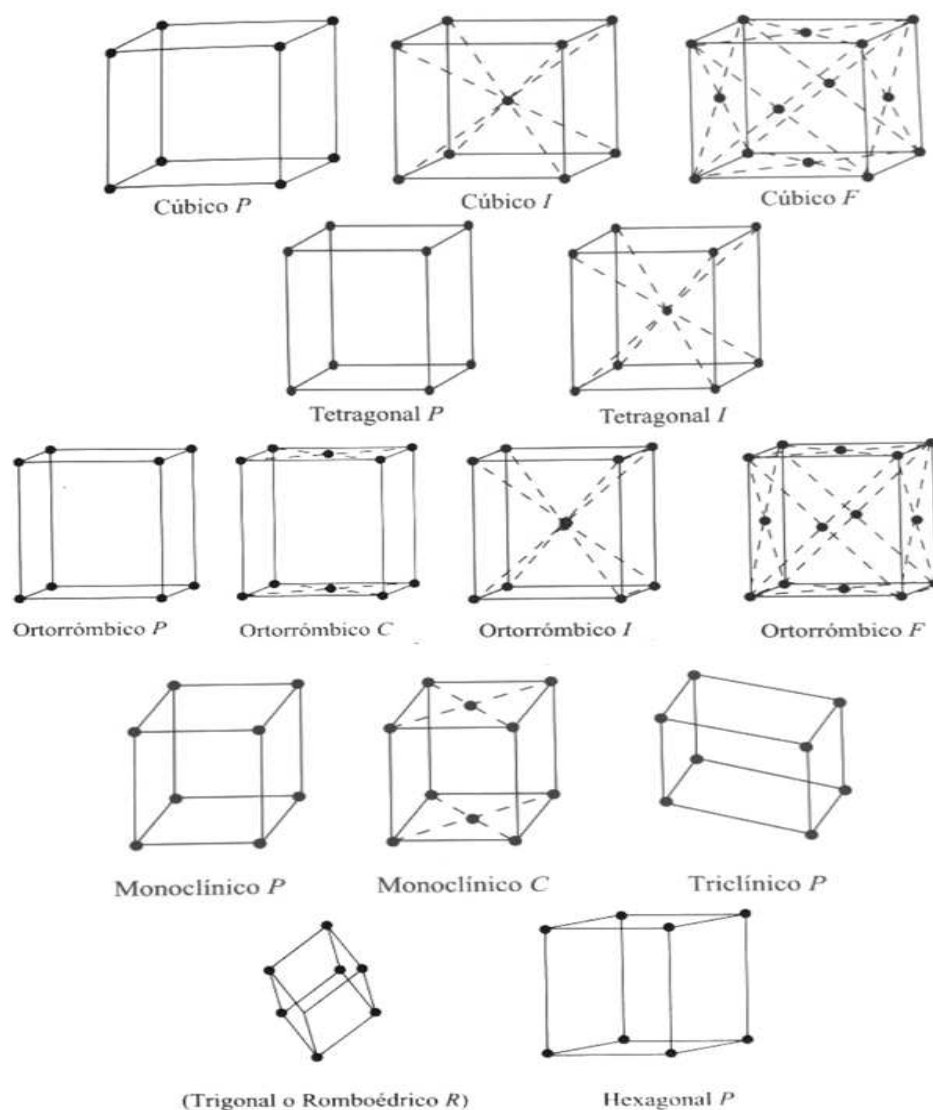


Figura 5. Sistemas cristalinos y Redes de Bravais.

se ubican en los vértices del paralelepípedo y R denota la celda primitiva solo en el caso trigonal o romboédrico. I denota una celda centrada en el cuerpo, o sea, una celda que tiene un punto reticular en el centro de la celda, además de los vértices y F denota una celda centrada en las caras, o sea, que tiene puntos reticulares centrados en las caras, además de los vértices. Si sólo tienen puntos reticulares en las bases, se designan con las letras A, B o C según sean las caras que tienen los dos puntos reticulares (Fuentes Cobas and Fuentes Montero, 2008).

2.7 Simetría estructural de los materiales

En el estudio de los composites, un análisis fundamental a desarrollar es la caracterización del efecto de la simetría de los constituyentes, de la microestructura, del volumen de fracción y de la estructura geométrica de sus refuerzos en las propiedades efectivas. Por lo tanto, determinar el comportamiento de los composites a partir de un número mínimo de propiedades independientes que describen a la propia simetría del mismo es una de las tareas más importantes. Los composites, de acuerdo a la simetría de sus propiedades, se pueden clasificar en: monoclinicos, ortotrópicos, transversalmente isotrópicos e isotrópicos.

En un medio MEE, los esfuerzos y los campos de desplazamientos eléctrico y magnético están en relación lineal con las deformaciones y con los campos eléctrico y magnético a través de las leyes constitutivas, Ecs. (2.1) – (2.3), y a su vez, gobernados por la simetría propia de cada propiedad material y por la simetría de sus materiales constituyentes.

El caso más general, asociado a un composite MEE anisotrópico (no posee ninguna simetría mínima respecto al alineamiento de los refuerzos fibrosos), la matriz simétrica de propiedades a nivel macroscópico, Ec. (2.27), resulta de acuerdo a las Ec. (2.1) – (2.3) y a las propias simetrías de las propiedades materiales.

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} & e_{111} & e_{211} & e_{311} & q_{111} & q_{211} & q_{311} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} & e_{122} & e_{222} & e_{322} & q_{122} & q_{222} & q_{322} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} & e_{133} & e_{233} & e_{333} & q_{133} & q_{233} & q_{333} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} & e_{123} & e_{223} & e_{323} & q_{123} & q_{223} & q_{323} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} & e_{113} & e_{213} & e_{313} & q_{113} & q_{213} & q_{313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & e_{112} & e_{212} & e_{312} & q_{112} & q_{212} & q_{312} \\ e_{111} & e_{122} & e_{133} & e_{123} & e_{113} & e_{112} & \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ e_{211} & e_{222} & e_{233} & e_{223} & e_{213} & e_{212} & \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ e_{311} & e_{322} & e_{333} & e_{323} & e_{313} & e_{312} & \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ q_{111} & q_{122} & q_{133} & q_{123} & q_{113} & q_{112} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ q_{211} & q_{222} & q_{233} & q_{223} & q_{213} & q_{212} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ q_{311} & q_{322} & q_{333} & q_{323} & q_{313} & q_{312} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

En este caso, correspondiente a un **composite triclínico**, el comportamiento del composite MEE es descrito a través de 75 coeficientes independientes: 21 coeficientes de rigidez, 18

coeficientes piezoeléctricos, 18 coeficientes piezomagnéticos, 6 coeficientes dieléctricos, 6 coeficientes magnetoeléctricos y 6 coeficientes magnéticos. Además, las propiedades físicas son dependientes de la dirección:

En los **compositos MEE monoclinicos 2** la simetría es caracterizada por un solo plano de simetría. Si el plano de simetría es tomado paralelo al plano X_1X_2 , en el sistema de coordenadas de referencia del composito, la matriz simétrica de propiedades asociada a nivel macroscópico resulta:

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} & 0 & 0 & e_{311} & 0 & 0 & q_{311} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} & 0 & 0 & e_{322} & 0 & 0 & q_{322} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} & 0 & 0 & e_{333} & 0 & 0 & q_{333} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 & e_{123} & e_{223} & 0 & q_{123} & q_{223} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1323} & C_{1313} & 0 & e_{113} & e_{213} & 0 & q_{113} & q_{213} & 0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & e_{312} & 0 & 0 & q_{312} \\ 0 & 0 & 0 & e_{123} & e_{113} & 0 & \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{223} & e_{213} & 0 & \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ e_{311} & e_{322} & e_{333} & 0 & 0 & e_{312} & 0 & 0 & \kappa_{33} & 0 & 0 & \alpha_{33} \\ 0 & 0 & 0 & q_{123} & q_{113} & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{223} & q_{213} & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ q_{311} & q_{322} & q_{333} & 0 & 0 & q_{312} & 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Por tanto, el comportamiento del composito es descrito por 41 coeficientes independientes: 13 coeficientes de rigidez, 8 coeficientes piezoeléctricos, 8 coeficientes piezomagnéticos, 4 coeficientes dieléctricos, 4 coeficientes magnetoeléctricos y 4 coeficientes magnéticos.

En los **compositos ortotrópicos**, la simetría es definida por tres planos de simetría mutuamente ortogonales. En ellos, las tensiones normales se aplican en las direcciones principales que se definen de la intersección de los planos de simetría. Por lo tanto, la matriz simétrica asociada a nivel macroscópico es dada por la Ec. (2.29). De acuerdo a la Ec. (2.29), el comportamiento del composito es descrito por 28 coeficientes independientes: por 9 coeficientes de rigidez, 5 coeficientes piezoeléctricos, 5 coeficientes piezomagnéticos, 3 coeficientes dieléctricos, 3 coeficientes magnetoeléctricos y 3 coeficientes magnéticos.

$$\begin{pmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{311} & 0 & 0 & q_{311} \\
C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{322} & 0 & 0 & q_{322} \\
C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{333} & 0 & 0 & q_{333} \\
0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 & 0 & e_{223} & 0 & 0 & q_{223} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & e_{113} & 0 & 0 & q_{113} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & \kappa_{11} & 0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e_{223} & 0 & 0 & 0 & \kappa_{22} & 0 & 0 & \alpha_{22} & 0 \\
e_{311} & e_{322} & e_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{33} & 0 & 0 & \alpha_{33} \\
0 & 0 & 0 & 0 & q_{113} & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 & \mu_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q_{223} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 & \mu_{22} & 0 \\
q_{311} & q_{322} & q_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 & \mu_{33}
\end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

En los **compositos MEE transversalmente isotrópicos**, la simetría se determina por un plano de isotropía. En este caso, este plano transversal tiene infinitos planos normales de simetría, y por lo tanto, dentro de este plano las propiedades del material son las mismas en todas las direcciones. De coincidir el eje de simetría con el eje Ox_3 del sistema de referencia, la matriz simétrica asociada a nivel macroscópico resulta:

$$\begin{pmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{311} & 0 & 0 & q_{311} \\
C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{322} & 0 & 0 & q_{322} \\
C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{333} & 0 & 0 & q_{333} \\
0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 & 0 & e_{223} & 0 & 0 & q_{223} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & e_{113} & 0 & 0 & q_{113} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & \kappa_{11} & 0 & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e_{223} & 0 & 0 & 0 & \kappa_{22} & 0 & 0 & \alpha_{22} & 0 \\
e_{311} & e_{322} & e_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{33} & 0 & 0 & \alpha_{33} \\
0 & 0 & 0 & 0 & q_{113} & 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 & \mu_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q_{223} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 & \mu_{22} & 0 \\
q_{311} & q_{322} & q_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 & \mu_{33}
\end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

Siendo $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$. En los compositos MEE transversalmente isotrópicos el comportamiento es descrito por 17 coeficientes independientes: 5 coeficientes de rigidez, 3 coeficientes piezoeléctricos, 3 coeficientes piezomagnéticos, 2 coeficientes dieléctricos, 2

coeficientes magnetoeléctricos y 2 coeficientes magnéticos, de manera tal que las propiedades materiales independientes no nulas, satisfacen:

$$C_{1111} = C_{2222}, C_{3333}, C_{1122}, C_{1133} = C_{2233}, C_{2323} = C_{1313} \text{ con } C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2, e_{113} = e_{223}, \\ e_{311} = e_{322}, e_{333}, q_{113} = q_{223}, q_{311} = q_{322}, q_{333}, \kappa_{11} = \kappa_{22}, \kappa_{33}, \alpha_{11} = \alpha_{22}, \alpha_{33}, \mu_{11} = \mu_{22} \text{ y } \mu_{33}.$$

En los **compositos isotrópicos**, las propiedades son iguales en todas las direcciones e independientes de la selección de los ejes de referencias. Por ende, un composito isotrópico contiene un número infinito de planos de simetría de propiedades materiales pasando por un punto. El comportamiento de estos compositos MEE es descrito por 5 coeficientes independientes: 2 coeficientes de rigidez, 1 coeficiente dieléctrico, 1 coeficiente magnetoeléctrico y 1 coeficiente magnético, de tal manera que las componentes no nulas son:

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}, C_{1122} = C_{1133} = C_{2233}, C_{2323} = C_{1313} = C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2, \kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{33}, \\ \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} \text{ y } \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33}.$$

2.8 Materiales constituyentes

En este trabajo, diferentes compositos fibrosos magneto-electro-elásticos cuyas fases son piezoeléctricas y/o piezomagnéticas son considerados para la estimación de sus propiedades efectivas. Para ello, distintos materiales constituyentes han sido tomados en cuenta para las simulaciones numéricas. En la Tabla 2, se reportan los valores de las propiedades elásticas, piezoeléctricas, piezomagnéticas, dieléctricas y magnéticas de los materiales constituyentes usados para los cálculos y los análisis desarrollados. Nótese que, en los constituyentes piezoeléctricos (piezomagnéticos) las propiedades piezomagnéticas (piezoeléctricas) tienen valores nulos, y en ambos constituyentes, las propiedades magnetoeléctricas son nulas.

El **titanato de bario** (BTO), uno de los materiales electrocerámicos clásicos existente, es un material cerámico ferroeléctrico con propiedades piezoeléctricas. Debido a sus propiedades dieléctricas es un candidato básico para la fabricación de condensadores cerámicos multicapa. El BTO cristaliza con una estructura cristalina tipo titanato de calcio (CaTiO_3) conocida como estructura perovskita cúbica simple (de 120 °C a 1460 °C) con grupo espacial $\text{Pm}3\text{m}$, (ver Figura 6). Su distribución espacial es dada de la siguiente manera:

los átomos de titanio y los de bario están ubicados en los vértices y en el centro del cubo, respectivamente. Los átomos de oxígeno están dispuestos en el centro de cada cara del cubo.

	BaTiO ₃ (BTO)	CoFe ₂ O ₄ (CFO)	Terfenol-D (TD)	Galfenol (% Ga = 19) H = 10 Oe
C_{1111} (GPa)	166	286	31.1	8.5409
C_{1122} (GPa)	77	173	15.2	0.65448
C_{1133} (GPa)	78	175.5	15.2	3.908
C_{3333} (GPa)	162	269.5	35.6	28.322
C_{1313} (GPa)	43	45.3	13.6	5.5556
e_{311} (C/m ²)	- 4.4	0	0	0
e_{333} (C/m ²)	18.6	0	0	0
e_{113} (C/m ²)	11.6	0	0	0
κ_{11} (C ² /Nm ²)	11.2 x10 ⁻⁹	0.08 x10 ⁻⁹	0.05	∞
κ_{33} (C ² /Nm ²)	12.6 x10 ⁻⁹	0.092 x10 ⁻⁹	0.05	∞
q_{311} (N/Am)	0	580.3	156.8	-444.3678
q_{333} (N/Am)	0	699.7	-60.9	-102.7126
q_{113} (N/Am)	0	550	108.3	155.5556
μ_{11} (Ns ² /C ²)	5.0 x10 ⁻⁶	590 x10 ⁻⁶	5.4 x10 ⁻⁶	1.3 x10 ⁻⁶
μ_{33} (Ns ² /C ²)	10.0 x10 ⁻⁶	157 x10 ⁻⁶	5.4 x10 ⁻⁶	5.3 x10 ⁻⁶

Tabla 2. Propiedades materiales de los constituyentes.

A temperatura ambiente, por debajo de 120 °C y hasta aproximadamente 5 °C, tiene una estructura cristalina tetragonal con un grupo espacial P4mm. En este rango de temperatura, aparece una polarización espontánea, siendo la dirección de polarización la <100>. Esta polarización espontánea es la que provoca en el BTO el comportamiento piezoeléctrico. Además, si está en forma pura es un buen aislante eléctrico con una resistividad comprendida entre 10¹² ohm·cm y 10¹⁴ ohm·cm. Sin embargo, es considerado un compuesto polifórmico, ya que, a otras temperaturas, presenta otras estructuras cristalinas, por ejemplo: a temperaturas mayores que 1460 °C su estructura es hexagonal; por debajo de 5 °C y hasta - 90 °C aparece en BTO una fase con estructura ortorrómbica cuyo grupo espacial es C2mm y por debajo de - 90 °C obtenemos la romboédrica (Caballero et al., 1994; Fernández et al., 2010).

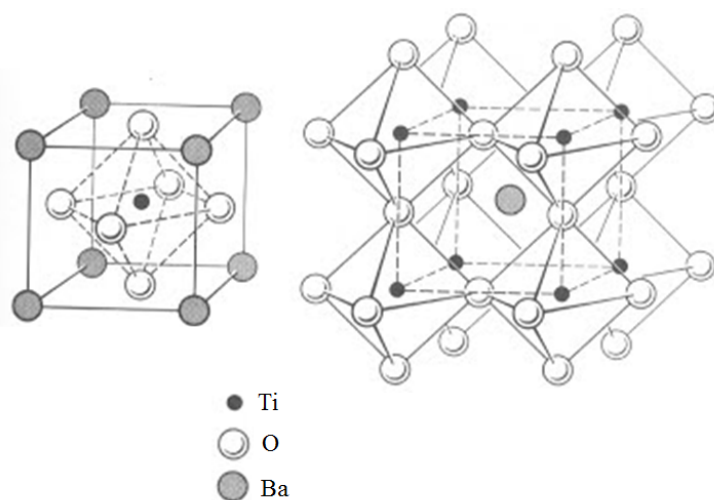


Figura 6. Estructura perovskita cúbica simple del BTO.

La **ferrita de cobalto** (CFO) es un material que pertenece a una amplia clase de materiales magnéticos duros con una gran importancia para la tecnología. Es muy bien conocido por su alta coercitividad y por su moderada magnetización de saturación, lo cual lo hace un buen candidato para la confección de imanes útiles en neveras y altavoces, para dispositivos de grabación magnética, etc. Además, es un material con una buena estabilidad química, resistencia al desgaste, dureza mecánica y buen aislante eléctrico (Franco and e Silva, 2010). La CFO es un óxido doble de hierro (III) y cobalto (II), químicamente definido como CoFe_2O_4 la cual presenta una estructura tipo espinela inversa con un grupo espacial $\text{Fd}3\text{m}$. La celda unitaria de una espinela inversa es una red cúbica centrada en las caras (FCC) de aniones de oxígeno, en la cual además, los iones de hierro (III) ocupan todas las posiciones (huecos) tetraédricas y la mitad de las octaédricas, mientras que los iones cobalto (II) ocupan la otra mitad de las posiciones octaédricas. Más detalles acerca de la CFO pueden encontrarse en las Refs.: (Franco and e Silva, 2010; Inoue et al., 2014; Rao et al., 2015).

El **terfenol-D** (TD) es una aleación compuesta de tres diferentes metales: terbio (Te), disprosio (Dy) y hierro (Fe), cuya fórmula química es $\text{Tb}_x\text{Dy}_{(1-x)}\text{Fe}_2$, con $x \approx 0.3$. Es el material más magnetostrictivo que existe a temperatura ambiente. Su magnetostrictividad está intrínsecamente relacionada a su estructura cristalina, por lo cual no se desvanece con el tiempo o con el uso. Por encima de la temperatura de Curie tiene una simetría cúbica y es

paramagnético aunque por debajo de la temperatura de Curie es ferromagnético y su simetría puede ser tetragonal o romboédrica en dependencia de su composición. El TD es un material que alcanza su más alto acoplamiento magnetostrictivo y la máxima permeabilidad magnética cerca de la frontera morfotrópica entre las fases tetragonal y romboédrica producto al cambio de estructura cristalina de la fase tetragonal a la romboédrica, cuando el volumen de fracción de $\text{Dy}_{(1-x)}\text{Fe}_2$ es aproximadamente 0.7. Además, tiene una temperatura de Curie de 380 °C, lo que le permite un rendimiento magnetostrictivo mayor a 1000 ppm a una temperatura ambiente de 200 °C. El TD usualmente funciona como un actuador en lugar de una cosechadora de energía (Branwood et al., 1987; Giurgiutiu and Lyshevski, 2016; Zhou et al., 2016). Con cierta frecuencia el TD es mezclado con algún polímero para mejorar su maniobrabilidad. En nuestro trabajo, el material constituyente magnetostrictivo, definido comúnmente en la literatura también como terfenol-D dado en la Tabla 2, es un composito que resulta de una combinación TD puro con epoxy, por lo tanto, sus propiedades se diferencian en cierta medida de las propiedades del TD puro.

El **galfenol** (Fe-Ga), es un material magnetostrictivo estructural único, producto de una aleación de hierro y galio, desarrollada por Clark y colaboradores, que presenta un alto acoplamiento magnetomecánico combinado propiedades estructurales similares al acero. Este tipo de aleaciones (composiciones de Fe-Ga de acuerdo con el porcentaje en peso de galio menor a 20 %) resultan ser mecanizables fácilmente, dúctiles y se pueden soldar, por lo cual, pueden ser útiles para dispositivos innovadores que usen sus propiedades estructurales, así como sus capacidades magnetostrictivas, por ejemplo: actuadores, sensores, cosechadoras de energía, etc. El galfenol, en general, es una aleación que posee una magnetostricción moderada bajo la acción de un campo magnético muy bajo, por lo que demuestra una alta resistencia a la tracción y una variación limitada en las propiedades magnetomecánicas para temperaturas entre -20 °C y 80 °C (Atulasimha and Flatau, 2011; Clark et al., 2003). En los compositos ME puede considerarse como fase magnetostrictiva, determinada por una simetría de cristal cúbica $\text{Im}\bar{3}\text{m}$, donde los átomos de galio son sustituidos aleatoriamente a través de la estructura reticular. En el galfenol, la simetría magnética se puede considerar como tetragonal $\text{I4}/\text{mm}'\text{m}'$, teniendo en cuenta que la simetría cúbica BCC del hierro presenta

el mismo grupo espacial magnético (Fuentes Cobas and Fuentes Montero, 2008; Fuentes-Cobas et al., 2011).

2.9 Método de homogeneización asintótica a doble escala

En la predicción de las propiedades efectivas de composites multifásicos, el desarrollo de modelos micromecánicos y de simulación numérica con base en la mecánica de medios continuos ha jugado un papel fundamental. En este sentido, la teoría de homogeneización a través de diferentes técnicas o modelos, ha permitido la caracterización de composites periódicos basándose en el conocimiento de las propiedades de sus materiales constituyentes, de las interfaces desarrolladas y de su microestructura.

En general, la teoría de la homogeneización nos permite la determinación de adecuadas ecuaciones diferenciales parciales homogeneizadas (o promediadas) que describen, en buena aproximación, a los procesos físicos que ocurren en composites heterogéneos cuando la escala de longitud de las heterogeneidades tiende a cero. De manera tal, que las propiedades macroscópicas o efectivas del composite se definen a partir de promedios ponderados de las propiedades y características de la microestructura (Torquato, 2002).

Las técnicas o modelos de homogenización, en general, consideran que el objeto de estudio es caracterizado por un medio macroscópico, definido en una macro-escala, y que las propiedades físicas y estructurales de los materiales constituyentes y las heterogeneidades se definen como estructuras a otro nivel de escala inferior o menor: micro, nano, etc. El principio de los modelos de homogenización se puede interpretar como un reemplazo de un medio (composite) heterogéneo por un medio equivalente homogeneizado, que desde un punto de vista macroscópico se comporta de la misma forma que el original. Sobre este medio equivalente, la búsqueda de una solución aproximada, que permita la descripción de las propiedades macroscópicas del composite, es determinada mediante la creación de ERV que figuren las características principales de la microestructura subyacente.

La relación estructura-propiedades en nuestro trabajo, se establece a partir del análisis de la estructura a nivel microscópico para poder describir las propiedades globales a nivel macroscópico. Por lo cual, el problema en estudio es definido como un problema de múltiples

escalas. En este sentido, la conexión entre los diferentes niveles es medida a partir de un parámetro geométrico, denotado por ε y definido por $\varepsilon = l/L$, que representa el cociente entre la dimensión característica del ERV (l) generalmente a nivel microscópico, y la longitud representativa de todo el compuesto (L), generalmente a nivel macroscópico, que caracteriza la dimensión efectiva usada para la medición de la propiedad en cuestión del compuesto, tal que $l \ll L$. En la Figura 7, se muestra la microestructura del compuesto a diferentes escalas. Un valor de $\varepsilon = 1$ representa que las longitudes de características l y L son iguales, por lo que las heterogeneidades del compuesto son visibles. Sin embargo, a medida que el parámetro ε se hace más pequeño las heterogeneidades son más difíciles de visualizar por lo que el compuesto se ve como un medio homogéneo.



Figura 7. Microestructura del compuesto a diferentes escalas.

En particular, el *método de homogeneización asintótica a doble escala*, inicialmente desarrollado y aplicado en medios periodicos por Bensoussan y colaboradores en 1978, Sánchez-Palencia en 1980 y Bakhvalov y Panasenko en 1989, es el método desarrollado en este trabajo.

El método de homogeneización asintótica a doble escala tiene su principio en la búsqueda de la solución del problema en estudio, dado por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de contorno, por medio de un desarrollo asintótico a doble escala en la forma de series de potencias en función del parámetro geométrico pequeño ε (Bakhvalov and Panasenko, 1989; Bensoussan et al., 1978; Sánchez-Palencia, 1980), es decir:

$$u \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), \quad (2.31)$$

siendo x_i las componentes de la variable lenta o global definida en el medio macroscópico y y_i las componentes de la variable rápida o local definida en la estructura microscópica, de manera que $y_i = x_i / \varepsilon$.

El proceso de homogeneización consiste en transformar el problema original, definido en un medio heterogéneo por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cuyos coeficientes son variables y rápidamente oscilantes, a través de desarrollos asintóticos a doble escala en otro más simplificado, definido por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cuyos coeficientes son constantes (no oscilarían rápidamente) sobre un medio equivalente homogéneo. En este último, los coeficientes constantes que lo caracterizan son llamados coeficientes o propiedades efectivas.

Desde el punto de vista matemático, este método hace que la solución del problema homogeneizado se aproxime a la solución del problema original cuando el parámetro geométrico ε tiende a cero. Sin embargo, desde el punto de vista práctico la implementación del mismo precisa, para la determinación de los coeficientes efectivos, de las soluciones de un conjunto de problemas interconectados definidos para diferentes potencias de ε , entre ellos los llamados problemas locales definidos sobre el ERV.

Entre las principales ventajas del MHA figuran que es un método efectivo para la investigación tanto de las propiedades macroscópicas como microscópicas de las estructuras periódicas. Además, el MHA está bien justificado para diferentes modelos físicos, pues existen muchos teoremas que demuestran la solubilidad de problemas que representan las etapas fundamentales de algoritmos para la construcción de una solución asintótica del problema original. Tiene un carácter universal por lo cual es aplicable, mediante modelos lineales o no lineales, a todo tipo de proceso físico que se desarrolle en medios periódicos elásticos, termoelásticos, viscoelásticos, piezoeléctricos, piezomagnéticos, magnetoeléctricos, porosos, y en mecánica de huesos, entre otros. En general, es de gran importancia teórica pues con las expresiones analíticas de las propiedades efectivas que brinda, se pueden controlar errores derivados de otros métodos de aproximación numérica y/o experimental (Bakhvalov and Panasenko, 1989).

Entre sus desventajas fundamentales está la necesidad de la solución numérica de los llamados problemas locales definidos sobre el ERV para la obtención de las propiedades efectivas del composito (Bakhvalov and Panasenko, 1989). Sin embargo, disponer de estos modelos que estén bien justificados, nos permite predecir las propiedades efectivas de compositos de una manera más confiable. Otra desventaja puede ser que para problemas tridimensionales se necesite de más tiempos de cómputo y capacidad de memoria para su realización.

2.10 Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es un método numérico muy poderoso que permite la solución de problemas físicos-matemáticos con distintos tipos de complejidades geométricas y/o fenomenológicas en mucho de los cuales no es posible determinar soluciones analíticas directas mediante expresiones matemáticas determinadas. Es aplicable en un gran número de problemas físicos relacionados con el análisis estructural, transferencia de calor, fluidos, problemas electromagnéticos, entre otros.

Mediante el MEF se pueden determinar soluciones aproximadas de problemas continuos complejos (problemas en los cuales tienen un número infinito de elementos implicados) de forma tal que el medio o dominio continuo Ω es discretizado en subdominios Ω_e (*elementos finitos*) cuya geometría es más simple y cuya unión equivale al medio original. Estos subdominios están interconectados por conjuntos discretos de puntos (*nodos*) los cuales forman líneas, planos y superficies y se comportan como segmentos, áreas y/o volúmenes de control independientes. En cada uno de estos nuevos elementos finitos, las propiedades del material y las relaciones gobernantes se consideran y se expresan en términos de un número finito de grados de libertad, caracterizados por los valores de una o varias funciones desconocidas definidas en los bordes y nodos del elemento; y a su vez, estos son afectados por las condiciones de fronteras que afecten al cuerpo estudiado como un todo. La solución aproximada del dominio continuo en estudio se obtiene de un conjunto de ecuaciones que surgen de seguir las reglas de los problemas discretos a partir del ensamblaje de los elementos y de considerar debidamente las cargas y las restricciones.

2.10.1 Características de los elementos finitos

En general, los elementos finitos utilizados en la práctica tienen formas geométricas simples, aunque su selección depende fundamentalmente del tipo de problema a resolver. Estos pueden ser líneas, curvas, triángulos, cuadriláteros y poliedros de acuerdo a la dimensión intrínseca (1D, 2D o 3D) de los mismos (ver Figura 8). Los elementos finitos se determinan geoméricamente por la ubicación de los nodos y por los segmentos o curvas que los unen. Además, se pueden clasificar en lineales o de orden superior (cuadráticos, cúbicos, etc.), de acuerdo a la aproximación deseada.

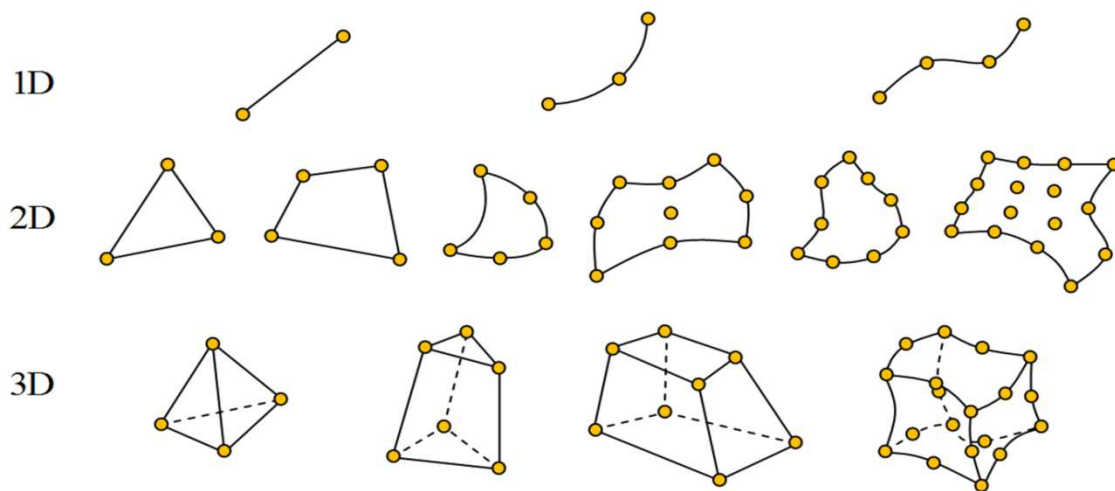


Figura 8. Elementos finitos lineales y de orden superior.

En los elementos, los nodos están caracterizados por un número finito de grados de libertad, a su vez, son definidos por la física del problema (desplazamientos, potenciales eléctricos y magnéticos, temperatura, etc.). El total de grados de libertad de un elemento se define a partir de la suma de los grados de libertad de los nodos que pertenezcan al elemento.

En el MEF es necesario establecer un sistema de referencias global y otro local o natural que definan a las coordenadas de los nodos en el continuo y sobre cada elemento finito. Estos sistemas de coordenadas permiten la conectividad de los elementos más eficiente, así como, la correspondencia global-local de la posición de los nodos. Esto permite con mayor facilidad determinar a las llamadas funciones de formas de los elementos y la integración en el

elemento de manera unificada y sencilla mediante la utilización de un elemento maestro o de referencia.

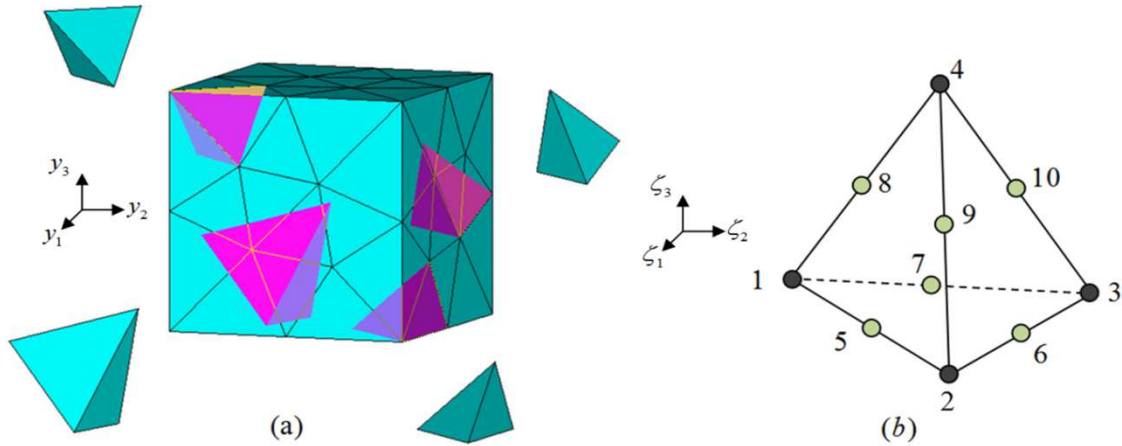


Figura 9. (a) Representación de un mallado por medio de tetraedros en el sistema de referencia global, (b) Tetraedro cuadrático (elemento maestro de 10 nodos) en el sistema de referencia local o natural.

La transformación de coordenadas de un sistema al otro es una relación biyectiva dependiente de la forma del elemento y de la aproximación considerada, de manera tal que:

$$y_1 = T(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \quad y_2 = T(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \quad y_3 = T(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \quad (2.32)$$

$$\zeta_1 = T^{-1}(y_1, y_2, y_3), \quad \zeta_2 = T^{-1}(y_1, y_2, y_3), \quad \zeta_3 = T^{-1}(y_1, y_2, y_3), \quad \zeta_4 = T^{-1}(y_1, y_2, y_3), \quad (2.33)$$

donde T es la función de transformación de coordenadas del sistema natural al sistema global.

En el análisis de problemas mediante el MEF, obtener una aproximación adecuada para los parámetros físicos que describen al problema es un proceso similar al realizado para aproximar la geometría. Estos pueden aproximarse por medio de funciones lineales o por funciones de orden superior. Por lo tanto, de acuerdo a los grados de aproximación utilizados en ambas aproximaciones (física-geométrica), los elementos se pueden clasificar en: Sub-, Iso- y/o Superparamétrico.

- Subparamétrico: si el orden de la aproximación de los parámetros físicos del elemento es mayor que el orden de la aproximación geometría del elemento.
- Isoparamétrico: si el orden de la aproximación de los parámetros físicos y de la geometría del elemento son iguales.
- Superparamétrico: si el orden de la aproximación de los parámetros físicos del elemento es menor que el orden de la aproximación geometría del elemento.

2.10.2 Representación isoparamétrica

La idea básica de la representación isoparamétrica de los elementos consiste en utilizar las mismas funciones de forma ψ_i^e asociadas al elemento e para interpolar tanto la geometría como los parámetros físicos de los elementos (Zienkiewicz and Taylor, 1989). En esta representación, las coordenadas naturales que definen al elemento caracterizan paramétricamente a las funciones de formas.

En general, para un elemento tridimensional definido en el sistema $\{x, y, z\}$ y con n nodos, las relaciones isoparamétricas están dadas por:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i^e, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i \psi_i^e, \quad z = \sum_{i=1}^n z_i \psi_i^e, \quad (2.34)$$

$$f = \sum_{i=1}^n f_i \psi_i^e, \quad (2.35)$$

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^e = 1, \quad (2.36)$$

de manera que las Ecs. (2.34) y (2.35) definen a las relaciones geométricas y físicas del elemento, respectivamente. En la Ec. (2.36) es definida la propiedad de partición de la unidad asociada al requisito de consistencia (completitud y compatibilidad) para las funciones de forma. En las Ecs. (2.34) y (2.35), x_i , y_i y z_i representan a las componentes de las posiciones de los nodos de cada elemento con respecto al sistema global $\{x, y, z\}$. La función f caracteriza los grados de libertad definidos por la física del problema. Estos conjuntos de ecuaciones definidos en las Ecs. (2.34) – (2.36) se pueden combinar en forma de matriz como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} & z_n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^e \\ \psi_n^e \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

2.10.3 Elemento cuadrilátero cuadrático

El elemento cuadrilátero cuadrático o de 8 nodos, en el sistema bidimensional cartesiano $\{y_1, y_2\}$, es un miembro polinomial completo de la familia isoparamétrica de los cuadriláteros. El cuadrilátero de 8 nodos se define por tener cuatro nodos ubicados en sus vértices y los restantes cuatro localizados en los puntos medios de sus aristas. La posición de los nodos del cuadrilátero puede especificarse mediante sus coordenadas cartesianas $\{y_1, y_2\}$ o por sus coordenadas naturales o isoparamétricas $\{\zeta_1, \zeta_2\}$. Las coordenadas ζ_1 y ζ_2 determinan un conjunto de valores adimensionados, las cuales varían entre -1 y 1 de un lado a otro del cuadrilátero y son nulas en las líneas isoparamétricas que unen los puntos medios de los lados opuestos (Felippa, 2017).

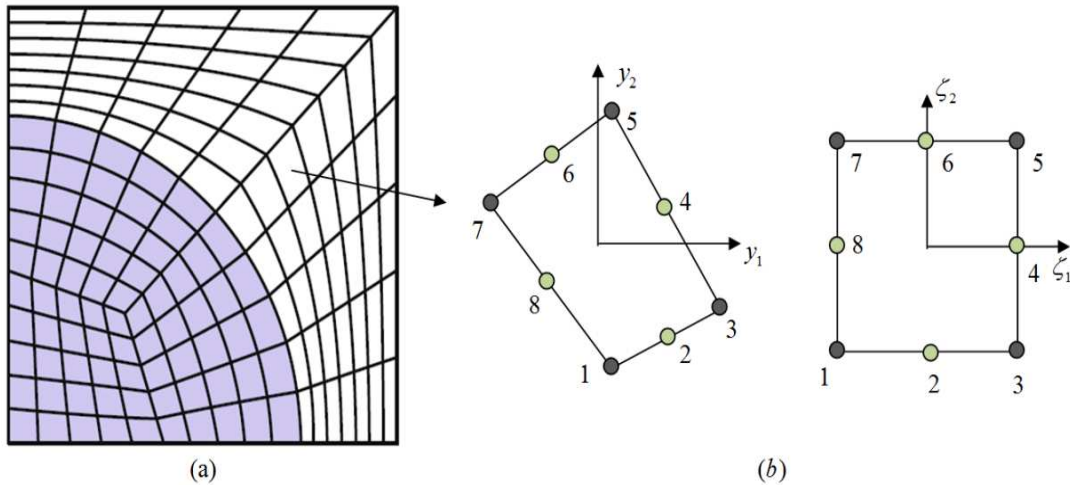


Figura 10. (a) Representación de un mallado por medio de cuadriláteros en el sistema de referencia global, (b) Cuadrilátero de 8 nodos en el sistema de referencia global y local o natural.

Para un elemento cuadrilátero de ocho nodos (Figura 10), las funciones de formas $\psi_i \equiv \psi_i^e$ en la base de los polinomios de Lagrange son:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \tau_1 \eta_1 c_1, & \psi_2 &= \tau_3 \eta_1, & \psi_3 &= \tau_2 \eta_1 c_2, & \psi_4 &= \tau_2 \eta_3, \\ \psi_5 &= \tau_2 \eta_2 c_3, & \psi_6 &= \tau_3 \eta_2, & \psi_7 &= \tau_1 \eta_2 c_4, & \psi_8 &= \tau_1 \eta_3,\end{aligned}\tag{2.38}$$

Con $\tau_1 = (1 - \zeta_1)/2$, $\eta_1 = (1 - \zeta_2)/2$, $\tau_2 = (1 + \zeta_1)/2$, $\eta_2 = (1 + \zeta_2)/2$, $\tau_3 = 1 - \zeta_1^2$, $\eta_3 = 1 - \zeta_2^2$, $c_1 = -1 - \zeta_1 - \zeta_2$, $c_2 = -1 + \zeta_1 - \zeta_2$, $c_3 = -1 + \zeta_1 + \zeta_2$ y $c_4 = -1 - \zeta_1 + \zeta_2$.

2.10.4 Elemento tetraédrico cuadrático

El elemento tetraédrico cuadrático o tetraedro de diez nodos, definido en el sistema tridimensional cartesiano $\{y_1, y_2, y_3\}$, ver Figura 9(b), es el segundo miembro polinomial completo de la familia isoparamétrica de los tetraedros. El tetraédrico cuadrático se define por tener cuatro nodos ubicados en sus vértices (localmente enumerados del 1 al 4) y los restantes seis nodos (localmente enumerados del 5 al 10) localizados en los puntos medios de sus aristas, aunque, estos últimos pueden moverse de estas posiciones sobre las aristas, siempre y cuando estén sujetos a la restricción de que el determinante del Jacobiano de las transformaciones de coordenadas es definido positivo (Felippa, 2017). Las caras del elemento se definen por seis nodos (Zienkiewicz and Taylor, 1989).

La posición de un nodo del tetraedro puede especificarse mediante sus coordenadas cartesianas $\{y_1, y_2, y_3\}$ o por sus coordenadas naturales tetraédricas $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$. Estas coordenadas naturales tetraédricas determinan un conjunto de valores adimensionados, tal que:

- $\zeta_4 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3$
- Las coordenadas naturales ζ_m ($m = \overline{1, 4}$) tienen un valor 1 en el nodo del vértice m y es cero en los otros nodos de los vértices y en todos los nodos de la cara opuesta al nodo m .
- Las coordenadas naturales ζ_m varían linealmente con la distancia desde un punto arbitrario P hasta la cara puesta al nodo m . Se definen como $\zeta_m = d_{P_m} / d_m$, siendo d_{P_m} la distancia

desde P hasta la cara del elemento opuesta al nodo m y d_m es la distancia del nodo m hasta su cara opuesta.

Las funciones de forma de la familia de los elementos tetraédricos se pueden determinar mediante una relación única a partir de polinomios de Lagrange, como sigue:

$$\psi_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = l_i^i(\zeta_1)l_j^j(\zeta_2)l_k^k(\zeta_3)l_l^l(\zeta_4), \quad (2.39)$$

tal que, $I + J + K + L = n$, siendo los subíndices I, J, K y L las coordenadas generalizadas del elemento y n el orden del elemento (lineal, cuadrático, etc.) correspondiente con el grado del mayor polinomio completo contenido en ψ_i . En la Ec. (2.39), $l_i^i(\zeta_j)$ representa al polinomio de Lagrange de grado I en la variable local ζ_j que pasa por el nodo i -ésimo. Estas funciones de formas del elemento son conformes y polinomios cuadráticos completos. La Tabla 3, muestra la relación entre las coordenadas generalizadas y las coordenadas naturales del elemento en cada nodo (Felippa, 2017; Zienkiewicz and Taylor, 1989).

Número local de los nodos	Coordenadas generalizadas				Coordenadas naturales			
	I	J	K	L	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
1	0	2	0	0	1	0	0	0
2	0	0	2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	2	0	0	1	0
4	2	0	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	1/2	1/2	0	0
6	0	0	1	1	0	1/2	1/2	0
7	0	1	0	1	1/2	0	1/2	0
8	1	1	0	0	1/2	0	0	1/2
9	1	0	1	0	0	1/2	0	1/2
10	1	0	0	1	0	0	1/2	1/2

Tabla 3. Coordenadas generalizadas y naturales del elemento tetraédrico.

Para un elemento tetraédrico cuadrático o tetraedro de diez nodos (ver Figura 9), las funciones de formas ψ_i^e en el elemento e en la base de los polinomios de Lagrange se definen como:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), \quad \psi_2 = \zeta_2(2\zeta_2 - 1), \quad \psi_3 = \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \quad \psi_4 = \zeta_4(2\zeta_4 - 1), \\ \psi_5 &= 4\zeta_1\zeta_2, \quad \psi_6 = 4\zeta_2\zeta_3, \quad \psi_7 = 4\zeta_3\zeta_1, \quad \psi_8 = 4\zeta_1\zeta_4, \quad \psi_9 = 4\zeta_2\zeta_4, \quad \psi_{10} = 4\zeta_3\zeta_4.\end{aligned}\quad (2.40)$$

El cálculo de las derivadas cartesianas de las funciones de forma se puede realizar aplicando la regla de la cadena de funciones de varias variables, resultando en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^e \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y_3} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{J}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial y_3}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial y_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial y_3}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial y_2}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial y_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

En la Ec. (2.41), $\mathbf{J}^e$ es la matrix Jacobiano cuyos términos se calculan por medio de las relaciones isoparamétricas, Ec. (2.37). Determinando la inversa de la matrix Jacobiano, Ec. (2.41), se encuentran las derivadas cartesianas de las funciones de forma del elemento.

2.11 Formulación variacional como una generalización del principio de Hamilton para compositos magneto-electro-elásticos. Energía potencial total

En el estudio de medios MEE, definido en Ω , el problema fuerte asociado es descrito por las ecuaciones Ecs. (2.12) – (2.16), donde u_i , ϕ y ψ representan la solución del mismo. Sin embargo, en ocasiones, la determinación de la solución exacta de estos problemas fuertes es difícil de determinar analíticamente debido a la complejidad del objeto de estudio. Un método alternativo, consiste en determinar la formulación débil o variacional; es decir, se puede establecer la solución mediante la formulación integral generalizando el principio de Hamilton. En este sentido, la solución variacional se puede adoptar mediante el esquema del principio de la energía potencial mínima combinado con el método de los elementos finitos, considerando como variables independientes a u_i , ϕ y ψ .

Determinación de la energía potencial total para un medio MEE

Sea Ω un medio MEE, limitado por una superficie cerrada $\partial\Omega$, en el cual δu_i , $\delta\phi$ y $\delta\psi$ representan variaciones virtuales arbitrarias y admisibles de los desplazamientos u_i y de los potenciales eléctrico ϕ y magnético ψ .

Si multiplicamos, Ecs. (2.5) y las ecuaciones de Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{D} = q$ y $B_{i,i} = 0$) por variaciones arbitrarias y admisibles de u_i , ϕ y ψ , respectivamente e integramos en el dominio Ω , la formulación débil asociada al problema MEE resulta por:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) \delta u_i dV + \int_{\Omega} (D_{i,i} - q) \delta\phi dV + \int_{\Omega} (B_{i,i}) \delta\psi dV = 0. \quad (2.42)$$

En la Ec. (2.42) se cumple que: Si un campo de desplazamientos $\mathbf{U} = (u_i, \phi, \psi)$ satisface la ecuación para cualesquiera sean las variaciones admisibles de los desplazamientos δu_i y de los potenciales $\delta\phi$ y $\delta\psi$ respectivamente, dicho campo de desplazamientos será una solución de Ecs. (2.12) - (2.16).

Si en la Ec. (2.42) se aplican propiedades de integración y derivación, se tiene en cuenta que $\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV$, en virtud de la propiedad conmutativa del operador δ respecto al operador diferencial $(\delta u_i)_{,j} = \delta u_{i,j}$ y de acuerdo al teorema de la divergencia, la ecuación Ec. (2.42) se formula como:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \delta u_i n_j dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV + \\ & + \int_{\partial\Omega} D_i \delta\phi n_i dS - \int_{\Omega} D_i \delta\phi_{,i} dV - \int_{\Omega} q \delta\phi dV + \int_{\partial\Omega} B_i \delta\psi n_i dS - \int_{\Omega} B_i \delta\psi_{,i} dV = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

además, debido a la simetría $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, la relación (2.4), las condiciones de frontera, Ec. (2.15), y las variaciones virtuales admisibles $\delta\phi_{,i} = -\delta E_i$ y $\delta\psi_{,i} = -\delta H_i$, queda:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} F_i \delta u_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dV - \\
& - \int_{\partial\Omega} Q \delta \phi dS + \int_{\Omega} D_i \delta E_i dV - \int_{\Omega} q \delta \phi dV + \int_{\Omega} B_i \delta H_i dV = 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Como en la Ec. (2.44), los incrementos δu_i , $\delta \phi$ y $\delta \psi$ son dependientes del tiempo y se anulan en dos instantes arbitrarios t_1 y t_2 , entonces si integramos respecto en el intervalo t_1 y t_2 , se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \int_{t_1}^{t_2} F_i \delta u_i dt dS - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dt dV + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} f_i \delta u_i dt dV - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dt dV - \\
& - \int_{\partial\Omega} \int_{t_1}^{t_2} Q \delta \phi dt dS + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} D_i \delta E_i dt dV - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} q \delta \phi dt dV + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} B_i \delta H_i dt dV = 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

pero $\int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i dt dV = - \int_{\Omega} \left[\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{du_i}{dt} \frac{d\delta u_i}{dt} dt \right] dV$ y $\delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 \right] = \frac{du_i}{dt} \frac{d\delta u_i}{dt}$, luego:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \int_{t_1}^{t_2} F_i \delta u_i dt dS - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dt dV + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} f_i \delta u_i dt dV + \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \\
& - \int_{\partial\Omega} \int_{t_1}^{t_2} Q \delta \phi dt dS + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} D_i \delta E_i dt dV - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} q \delta \phi dt dV + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} B_i \delta H_i dt dV = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

siendo $T = \int_{\Omega} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 dV$ la energía cinética del cuerpo.

Análogamente, si se combinan $\int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dt dV$, $\int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} D_i \delta E_i dt dV$ y $\int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} B_i \delta H_i dt dV$ de

acuerdo a la Ec. (2.46), si se usan las Ecs. (2.1) – (2.3) y se aplican las reglas de diferenciación, y las expresiones resultantes se sustituyen en la Ec. (2.46), obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \int_{t_1}^{t_2} F_i \delta u_i dt dS - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \delta (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dt dV + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} f_i \delta u_i dt dV + \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \\
& - \int_{\partial\Omega} \int_{t_1}^{t_2} Q \delta \phi dt dS + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \delta (D_i E_i) dt dV - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} q \delta \phi dt dV + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \delta (B_i H_i) dt dV = 0,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Finalmente, si se consideran que las fuerzas son conservativas (las fuerzas superficiales F_i y las fuerzas másicas f_i no dependen de u_i) y que las cargas Q y q no dependen de ϕ , la Ec. (2.47) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T - \left[\frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \delta \int_{\partial\Omega} F_i u_i dS - \delta \int_{\Omega} f_i u_i dV + \delta \int_{\partial\Omega} Q \phi dS - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} D_i E_i dV + \delta \int_{\partial\Omega} q \phi dS - \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} B_i H_i dV \right] dt = 0, \quad (2.48)$$

siendo, Ec.(2.48), la expresión del principio de Hamilton extendido en su formulación variacional para el medio Ω , luego:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (2.49)$$

Donde T y U son las energías cinética y potencial total extendida del medio Ω dadas por:

$$T = \int_{\Omega} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 dV, \quad (2.50)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_{\partial\Omega} F_i u_i dS - \int_{\Omega} f_i u_i dV + \int_{\partial\Omega} Q \phi dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_i E_i dV + \int_{\partial\Omega} q \phi dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} B_i H_i dV, \quad (2.51)$$

donde este último término es el que incluye la contribución del efecto de los campos eléctrico y magnético en el medio Ω . En la Ec. (2.49), $L = T - U$ define el funcional lagrangiano de la integral variacional.

Conclusiones

El presente trabajo estuvo motivado por el interés fundamental de estudiar la influencia del efecto de la interfaz en las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos en los que el efecto de acoplamiento magnetoeléctrico esté presente. Por tal motivo, se desarrolló una herramienta basada en modelos micromecánicos y de simulación numérica que sirve de apoyo al diseño de experimentos en búsqueda de nuevos composites cuyas propiedades sean las deseadas, estén optimizadas, y sean posibles de obtener en un número razonable de experimentos. Además, sirve de ayuda en la predicción y comprensión de la relación estructura-propiedades y del comportamiento de los composites, así como para la interpretación de resultados experimentales.

Los resultados fundamentales del trabajo son:

- Se desarrollaron dos modelos micromecánicos diferentes uno analítico y otro semi-analítico que permiten el cálculo de las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos magneto-electro-elásticos periódicos, bifásicos y trifásicos con ERV bidimensionales y tridimensionales, basados en el método de homogeneización asintótica y en el método de los elementos finitos.
- Se desarrolló un modelo semi-analítico basado en basados un método híbrido entre el método de homogeneización asintótica y en el método de los elementos finitos que permite el estudio de la relación estructura-propiedades de una amplia gama de composites periódicos.
- Se formularon dos modelos analíticos diferentes para describir la interacción entre las fibras y la matriz: el *modelo de imperfección* aplicado para la descripción de composites bifásicos con interfaz imperfecta entre los constituyentes y el *modelo de interfase* aplicado para la descripción de composites trifásicos con una interfase existente entre las fibras y la matriz. En ambos modelos los ERV considerados son paralelogramos.
- Las formulaciones analíticas derivadas para los problemas locales antiplanos derivados por MHA – Imp y MHA – 3F, de sus soluciones y de las propiedades efectivas asociadas son simples y fáciles de implementar computacionalmente, por lo cual, se pueden usar de forma eficiente para verificar la implementación de métodos experimentales, numéricos y modelos analíticos.

- La formulación analítica desarrollada por el método semi-analítico SAFEM es simple, fácil de implementar computacionalmente y es aplicable a composites MEE cuyos ERV tienen diferentes geometrías de los refuerzos.
- Las fórmulas desarrolladas son además válidas para el análisis de las propiedades efectivas antiplanas de composites fibrosos periódicos, bifásicos y trifásicos piezoeléctricos y elásticos con ERV de tipo paralelogramos.
- La buena calidad de la precisión y eficiencia de los modelos presentados MHA – Imp, MHA – 3F y SAFEM se demostró mediante comparaciones con resultados reportados en la literatura.

De acuerdo a los resultados numéricos mostrados se concluye que:

- La distribución de las fibras en la matriz, representada mediante ERVs paralelogramos, permite dos clases de simetría de grupo puntual para el comportamiento global del composite: monoclinico 2 (cuando el ERV es paralelogramo con $\theta_1 = 30^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ$) y transversalmente isotrópico (cuando el ERV es cuadrado $\theta_1 = 90^\circ$ o hexagonal $\theta_1 = 60^\circ$).
- Las propiedades efectivas antiplanas pueden estar afectadas o no en dependencia del tipo de imperfección existente y por la selección de los constituyentes. La combinación de diferentes tipos de imperfecciones cualitativamente induce una superposición de cada imperfección por separado.
- El efecto de acoplamiento magnetoeléctrico es sensible a la distribución de la fibra, al tipo de imperfección existente y a la combinación de los materiales constituyentes.
- El efecto de la imperfección es dominante sobre la distribución espacial de las fibras en la matriz. El acoplamiento ME se afecta considerablemente ante cualquier imperfección, mientras que la distribución de las fibras induce cambios más débiles en el acoplamiento ME. Cada uno de estos efectos puede ser estudiado separadamente.
- El efecto de acoplamiento magnetoeléctrico siempre se debilita ante cualquier tipo de imperfección existente en la interfaz fibra/matriz.
- La conexión entre los parámetros de imperfección y el debilitamiento del coeficiente ME no siempre se puede establecer como una función independiente de la estructura del compuesto. En este sentido se necesita más sistematización.

- Los modelos desarrollados permiten describir el comportamiento de la porosidad en una buena aproximación. Por lo cual el efecto de distribución de la porosidad y el tamaño de los poros en el comportamiento del composito es analizado. A medida que aumenta el tamaño de los poros las propiedades efectivas antiplanas del composito se debilitan monótonamente desde el valor de matriz normalizado hasta el valor inferior permitido que se corresponde con el límite de percolación.
- La influencia de una interfaz perfecta o imperfecta en las propiedades efectivas obtenido mediante el modelo MHA – Imp se puede describir a partir del modelo MHA – 3F considerando una interfase delgada.
- En los compositos MEE analizados el valor del acoplamiento magnetoeléctrico $|\alpha_{11}^*|$ más alto se alcanza para la combinación CFO/BTO/TD (fibra/interfase/matriz) en compositos trifásicos con una distribución hexagonal de las fibras en la matriz y para un volumen de fracción total de la fibra y la interfase igual a 0.86. Destaquemos que este valor es más alto que los obtenidos cuando se consideran compositos bifásicos constituidos por cualquier combinación de los materiales CFO, BTO y TD.
- El efecto magnetoeléctrico α_{11}^* en compositos bifásicos sujetos a condiciones de contacto perfecto y con una distribución hexagonal de las fibras alcanza máximo cuando el composito está constituido por BTO/TD (fibra/matriz). Además, en compositos cuyos constituyentes sean de BTO como matriz y CFO o TD como fibra, el mayor acoplamiento magnetoeléctrico α_{11}^* es obtenido cuando las fibras son de TD.
- Una forma de maximizar el acoplamiento magnetoeléctrico es considerando que el constituyente magnetostrictivo sea auxético.
- El galfenol como constituyente magnetostrictivo junto con una fase piezoeléctrica es una opción potencial capaz de aumentar el acoplamiento ME en compositos reforzados con fibras.
- La influencia de la interfase sobre el módulo efectivo antiplano puede inducir un comportamiento anisotrópico cuando se tienen en cuenta una distribución de fibras con diferentes densidades.

Trabajos que resultaron de la investigación desarrollada

Artículos publicados en revistas indizadas

- 2017.** López-Realpozo, J.C., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Camacho-Montes, H., Espinosa-Almeyda, Y., Sabina, F.J., Vinh, P.C., *Analysis of mechanical and electrical imperfect contacts in piezoelectric composites*, Mech. Res. Comm., doi: 10.1016/j.mechrescom.2017.11.001.
- 2017.** Espinosa-Almeyda Y., Camacho-Montes H., Rodríguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R., López-Realpozo J.C., Bravo-Castillero J., Sabina F. J., *Influence of imperfect interface and fiber distribution on the antiplane effective magneto-electro-elastic properties for fiber reinforced composites*. International Journal of Solids and Structures, 112, 155 – 168. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.016
- 2017.** Espinosa-Almeyda Y., Camacho-Montes H., Nava-Gómez G. G., Mederos-Madrado B. J., Guinovart-Díaz R., López-Realpozo J. C., *The influence of Galfenol constituent in the improvement of the magnetoelectric coupling effect for composite materials*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(9), 3320–3332. doi: 10.1002/mma.3958.
- 2017.** Guinovart-Díaz R., Rodríguez-Ramos R., Espinosa-Almeyda Y., López-Realpozo J.C., Dumont S., Lebon F., Conci A., *An approach for modeling three-phase piezoelectric composites*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(9), 3230–3248. doi: 10.1002/mma.3937.
- 2014.** Espinosa-Almeyda Y., López-Realpozo J. C., Rodríguez-Ramos R., Bravo-Castillero J., Guinovart-Díaz R., Camacho-Montes H., Sabina F. J., *Antiplane Magneto-electro-elastic effective properties of three-phase fiber composite*. International Journal of Solids and Structures, 51, 3508 – 3521. dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.030.

Trabajos presentados en congresos nacionales e internacionales

2017. LX Congreso Nacional de Física, Monterrey, Nuevo León. Octubre, 8 – 13.

Yoanh Espinosa Almeyda, Héctor Camacho Montes, José A. Otero Hernández. *Aplicación de método semi-analítico para el cálculo de propiedades efectivas de Compuestos piezoeléctricos tridimensionales*. Sección mural: Estado Solido. (Póster)

2017. X International Conference on Surfaces, Materials and Vacuum. Cd. Juárez, Chih., México. September, 25 - 29.

Héctor Camacho Montes, Yoanh Espinosa Almeyda, José A. Otero Hernández, Reinaldo Rodríguez Ramos, Federico J. Sabina Ciscar. *Antiplane effective properties for a piezoelectric composite based on semianalytical model*. Symposium: Theory and simulation of materials. (Póster 97 - TSM)

2017, XXVI International Materials Reseach Congress (IMRC). Cancún, Quintana Roo, México. August, 20 – 25.

Yoanh Espinosa Almeyda, Héctor Camacho Montes, José Antonio Otero Hernández, José Trinidad Elizalde Galindo, Reinaldo Rodríguez Ramos, Raúl Guinovart Díaz, Juan Carlos López Realpozo. *Characterization based on micromechanical analysis for piezoelectric composite*. Symposium: Advanced Structural Materials: Synthesis, Mechanics, Properties and Applications. (Póster)

2016, XXV International Materials Reseach Congress (IMRC). Cancún, Quintana Roo, México. August, 14 – 19.

Y. Espinosa Almeyda, H. Camacho Montes, R. Rodríguez Ramos, R. Guinovart Díaz, J. C. López Realpozo, J. Bravo Castillero, F. J. Sabina. *Characterization based on micromechanical analysis for piezoelectric-piezomagnetic fibrous composite under imperfect contact*. Symposium: General Materials Science. From Metallurgy to Nanoscience: a special symposium dedicated to Dr. Miguel José Yacamán in occasion of his 70th birthday. (Póster)

2015, VI Congreso Nacional de Ciencia e Ingeniería en Materiales. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Cd. Juárez, Chih., México. Marzo, 2 – 6.

Yoanh Espinosa Almeyda, Héctor Camacho Montes, Raúl Guinovart Díaz, Reinaldo Rodríguez Ramos, Julian Bravo Castillero, Juan Carlos López Realpozo. *Propiedades efectivas magneto-electro-elásticas de materiales compuestos trifásicos fibrosos con celda de periodicidad tipo paralelogramo*. (Póster)

Referencias

- Abderrahmane, B., Lahcen, A., Ali Aljinaidi, A., 2016. Multiphase Differential Scheme for Effective Properties of Magneto-electroelastic Composite Materials. *Journal of Engineering Materials and Technology* 139, 011004-011004-011009.
- Aboudi, J., 1991. *Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach*. Elsevier.
- Aboudi, J., 2001. Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-thermo-elastic multiphase composites. *Smart Materials and structures* 10, 867-877.
- Aized, T., Khan, M.B., Raza, H., Ilyas, M., 2017. Production routes, electromechanical properties and potential application of layered nanomaterials and 2D nanopolymeric composites-a review. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 93, 3449-3459.
- Astrov, D.N., 1960. The magnetoelectric effect. *Soviet Physics JETP* 11, 708-709.
- Atulasimha, J., Flatau, A.B., 2011. A review of magnetostrictive iron–gallium alloys. *Smart Materials and Structures* 20, 043001.
- Atulasimha, J., Flatau, A.B., Cullen, J.R., 2008. Analysis of the effect of gallium content on the magnetomechanical behavior of single-crystal FeGa alloys using an energy-based model. *Smart Materials and Structures* 17, 025027.
- Bakhvalov, N.S., Panasenko, G.P., 1989. *Homogenization Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Bartkowska, J.A., 2015. The magnetoelectric coupling effect in multiferroic composites based on PZT–ferrite. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 374, 703-706.
- Bensoussan, A., Lions, J.L., Papanicolaou, G., 1978. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland, Amsterdam.
- Benveniste, Y., 1985. The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mechanics of Materials* 4, 197-208.
- Benveniste, Y., 1987. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6, 147-157.
- Benveniste, Y., 1995. Magnetoelectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. *Physical Review* 51, 16424 - 16427.
- Benveniste, Y., Dvorak, G.J., 1992. Uniform fields and universal relations in piezoelectric composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 1295 - 1312.
- Berbyuk, V., 2013. *Vibration energy harvesting using Galfenol-based transducer*, SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring. SPIE, p. 12.
- Berger, H., Kari, S., Gabbert, U., Rodriguez-Ramos, R., Guinovart, R., Otero, J.A., Bravo-Castillero, J., 2005. An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites. *International Journal of Solids and Structures* 42, 5692-5714.
- Berlincourt, D.A., Curran, D.R., Jaffe, H., 1964. *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and their Function in Transducers*. Academic Press, New York.
- Bichurin, M., Petrov, V., Leontyev, V., Saplev, A., 2017. Two-range magnetoelectric sensor. *AIP Advances* 7, 015009.

- Bichurin, M.I., Petrov, V.M., Averkin, S.V., Liverts, E., 2010. Present status of theoretical modeling the magnetoelectric effect in magnetostrictive-piezoelectric nanostructures. Part II: Magnetic and magnetoacoustic resonance ranges. *Journal of Applied Physics* 107, 053905.
- Bichurin, M.I., Petrov, V.M., Petrov, R.V., 2012. Direct and inverse magnetoelectric effect in layered composites in electromechanical resonance range: A review. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 324, 3548-3550.
- Bichurin, M.I., Petrov, V.M., Petrov, R.V., Kiliba, Y.V., Bukashev, F.I., Smirnov, A.Y., Eliseev, D.N., 2002. Magnetoelectric Sensor of Magnetic Field. *Ferroelectrics* 280, 199-202.
- Branwood, A., Janio, A.L., Piercy, A.R., 1987. Domain structures in polycrystalline $\text{Tb}_{0.27}\text{Dy}_{0.73}\text{Fe}_2$ (Terfenol) in the applied field region of optimum magnetoelastic properties. *Journal of Applied Physics* 61, 3796-3798.
- Bravo Castillero, J., 1998. Modelación matemática de compuestos piezoeléctricos. Aplicaciones, Departamento de Matemáticas. Facultad de Matemática y Computación. Universidad de la Habana, Ciudad de la Habana, Cuba, p. 87.
- Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., Brenner, R., 2012. Unified analytical formulae for the effective properties of periodic fibrous composites. *Materials Letters* 73, 68-71.
- Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Sabina, F.J., Aguiar, A.R., Silva, U.P., Gómez-Muñoz, J.L., 2009. Analytical formulae for electromechanical effective properties of 3–1 longitudinally porous piezoelectric materials. *Acta Materialia* 57, 795-803.
- Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Mechkour, H., Otero, J.A., Sabina, F.J., 2008. Homogenization of magneto-electro-elastic multilaminated materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 61, 311-332.
- Bravo-Castillero, J., Sixto-Camacho, L.M., Brenner, R., Guinovart-Díaz, R., Pérez-Fernández, L.D., Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., 2015. Temperature-related effective properties and exact relations for thermo-magneto-electro-elastic fibrous composites. *Computers & Mathematics with Applications* 69, 980-996.
- Buchanan, G.R., 2004. Layered versus multiphase magneto-electro-elastic composites. *Composites Part B: Engineering* 35, 413-420.
- Budiansky, B., 1965. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of Mechanics Physics of Solids* 13, 223-227.
- Bunget, I., Raetchi, V., 1981. Magnetoelectric effect in the heterogeneous system NiZn ferrite-PZT ceramic. *physica status solidi (a)* 63, K55-K57.
- Caballero, A.C., Fernandez, J.F., Duran, P., Maure, C., 1994. Titanato de bario cerámico. *Bol. Soc. Esp. Ceram. V. 33*, 5-21.
- Camacho-Montes, H., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Sabina, F.J., 2006. Effective coefficients for two phase magneto-electroelastic fibrous composite with square symmetry cell in-plane mechanical displacement and out-of-plane electric and magnetic field case. *Integrated Ferroelectrics* 83, 49-65.
- Camacho-Montes, H., Sabina, F.J., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., 2009. Magnetoelectric coupling and cross-property connections in a square array of a binary composite. *International Journal of Engineering Science* 47, 294-312.

- Chandrupatla, T.R., Belegundu, A.D., 1999. *Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería*, Segunda Edición ed. Prentice Hall, México.
- Chen, Z., Yu, S., Meng, L., Lin, Y., 2002. Effective properties of layered magneto-electro-elastic composites. *Composite Structures* 57, 177-182.
- Clark, A.E., Hathaway, K.B., Wun-Fogle, M., Restorff, J.B., Lograsso, T.A., Keppens, V.M., Petculescu, G., Taylor, R.A., 2003. Extraordinary magnetoelasticity and lattice softening in bcc Fe-Ga alloys. *Journal of Applied Physics* 93, 8621-8623.
- Curie, P., 1894. Sur la symmetric dans phenomenes physiques. *Journal de Physique* 3e Séries, 3, 393
- de Medeiros, R., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Otero, J.A., Tita, V., 2014. Numerical and analytical analyses for active fiber composite piezoelectric composite materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 26, 101-118.
- Dinzart, F., Sabar, H., 2011. Magneto-electro-elastic coated inclusion problem and its application to magnetic-piezoelectric composite materials. *International Journal of Solids and Structures* 48, 2393 - 2401.
- Dzyaloshinskii, I.E., 1960. On the magneto-electrical effect in antiferromagnets. *Soviet Physics (English translation - JETP)* 10, 628-629.
- Emam, S.A., Inman, D.J., 2015. A Review on Bistable Composite Laminates for Morphing and Energy Harvesting. *Applied Mechanics Reviews* 67.
- Espinosa-Almeyda, Y., Camacho-Montes, H., Gabriel Nava-Gomez, G., Mederos Madrazo, B.J., Guinovart-Díaz, R., Carlos Lopez-Realpozo, J., 2017a. The influence of Galfenol constituent in the improvement of the magnetoelectric coupling effect for composite materials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40, 3320-3332.
- Espinosa-Almeyda, Y., Camacho-Montes, H., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., López-Realpozo, J.C., Bravo-Castillero, J., Sabina, F.J., 2017b. Influence of imperfect interface and fiber distribution on the antiplane effective magneto-electro-elastic properties for fiber reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures* 112, 155-168.
- Espinosa-Almeyda, Y., López-Realpozo, J.C., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Camacho-Montes, H., Sabina, F.J., 2011. Effects of interface contacts on the magneto electro-elastic coupling for fiber reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures* 48, 1525-1533.
- Espinosa-Almeyda, Y., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., López-Realpozo, J.C., Camacho-Montes, H., Sabina, F.J., Lebon, F., 2014. Antiplane magneto-electro-elastic effective properties of three-phase fiber composites. *International Journal of Solids and Structures* 51, 3508-3521.
- Felippa, C.A., 2017. *Introduction to finite element methods (ASEN 5007)*, University of Colorado, Boulder.
- Fernández, C., Rivera, E., Rodríguez Páez, J.E., 2010. Caracterización eléctrica y microestructural de cerámicas densificadas de BaTiO₃ obtenido por pechini.
- Fetisov, Y.K., Srinivasan, G., 2006. Electric field tuning characteristics of a ferrite-piezoelectric microwave resonator. *Applied Physics Letters* 88, 3.
- Fiebig, M., 2005. Revival of the magnetoelectric effect. *Journal of Physics D: Applied Physics* 38, R123.

- Fiebig, M., Spaldin, N.A., 2009. Current trends of the magnetoelectric effect. *The European Physical Journal B* 71, 293.
- Fischer, E., Gorodetsky, G., Hornreich, R.M., 1972. A new family of magnetoelectric materials: $A_2M_4O_9$ ($A = Ta, Nb$; $M = Mn, Co$). *Solid State Communications* 10, 1127-1132.
- Franco, A.J., e Silva, F.C., 2010. High temperature magnetic properties of cobalt ferrite nanoparticles. *Applied Physics Letters* 96, 172505.
- Fuentes Cobas, L.E., Fuentes Montero, M.E., 2008. La relación estructura-simetría-propiedades en cristales y policristales. Editorial Reverte.
- Fuentes, M.A.E., Camacho, H., Fuentes, L., 2001. Propiedades de acoplamiento eléctrico y magnético: cristales y policristales. *Boletín de la Sociedad Española de Cerámica y Vidrio* 40, 267 - 274.
- Fuentes, M.E., Fuentes, L., Olivera, R., García, M., 2007. Meso- and nano-magnetoelectricity: a review. *Revista mexicana de física* 53, 21-29.
- Fuentes-Cobas, L.E., Matutes-Aquino, J.A., Botello-Zubiate, M.E., González-Vázquez, A., Fuentes-Montero, M.E., D., C., 2015. Advances in Magnetoelectric Materials and Their Application. *Handbook of Magnetic Materials* 24, 237 - 322.
- Fuentes-Cobas, L.E., Matutes-Aquino, J.A., Fuentes-Montero, M.E., 2011. Chapter Three - Magnetoelectricity, in: Buschow, K.H.J. (Ed.), *Handbook of Magnetic Materials*. Elsevier, pp. 129-229.
- Ge, X.H., Ji, H., Li, Y., Chen, J.K., Wang, Y.G., 2017. Large resonance magnetoelectric response in $Ni(\text{Terfenol-D})/\text{Pb}(\text{Zr,Ti})\text{O}_3$ bilayer laminate composites. *Journal of Materials Science-Materials in Electronics* 28, 15252-15257.
- Gibson, R.F., 2010. A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures. *Composite Structures* 92, 2793-2810.
- Giurgiutiu, V., Lyshevski, S.E., 2016. *Micromechatronics: Modeling, Analysis, and Design with MATLAB*, Second Edition. CRC Press.
- Guinovart-Díaz, R., López-Realpozo, J.C., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Ramírez, M., Camacho-Montes, H., Sabina, F.J., 2011. Influence of parallelogram cells in the axial behaviour of fibrous composite. *International Journal of Engineering Science* 49, 75-84.
- Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Sabina, F.J., Monsivais Galindo, G., Wang, Y.-S., 2013. Plane Magneto-Electro-Elastic Moduli of Fiber Composites with Interphase. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 20, 552-563.
- Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., Espinosa-Almeyda, Y., López-Realpozo, J.C., Dumont, S., Lebon, F., Conci, A., 2017. An approach for modeling three-phase piezoelectric composites. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40, 3230-3248.
- Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., López-Realpozo, J.C., Bravo-Castillero, J., Otero, J.A., Sabina, F.J., Lebon, F., Dumont, S., 2016. Analysis of fibrous elastic composites with nonuniform imperfect adhesion. *Acta Mechanica* 227, 57-73.
- Guinovart-Díaz, R., Yan, P., Rodríguez-Ramos, R., López-Realpozo, J.C., Jiang, C.P., Bravo-Castillero, J., Sabina, F.J., 2012. Effective properties of piezoelectric composites with parallelogram periodic cells. *International Journal of Engineering Science* 53, 58-66.

- Harshe, G., Dougherty, J.P., Newnham, R.E., 1993. Magnetoelectric effect in composite materials, North American Conference on Smart Structures and Materials. SPIE, pp. 224 - 235.
- Hashemi, R., 2016. Magneto-electro-elastic properties of multiferroic composites containing periodic distribution of general multi-coated inhomogeneities. *International Journal of Engineering Science* 103, 59-76.
- Hashin, Z., 1983. Analysis of Composite Materials—A Survey. *Journal of Applied Mechanics* 50, 481-505.
- Hashin, Z., 1990. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mechanics of Materials* 8, 333-348.
- Hashin, Z., 1991a. The Spherical Inclusion With Imperfect Interface. *Journal of Applied Mechanics* 58, 444-449.
- Hashin, Z., 1991b. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 745-762.
- Hashin, Z., 2002. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 2509 - 2537.
- Hornreich, R.M., 1969. The magnetoelectric effect: Some likely candidates. *Solid State Communications* 7, 1081 - 1085.
- Hornreich, R.M., 1970. Theory of the Magnetoelectric Effect in Polycrystalline Powders. *Journal of Applied Physics* 41, 950-951.
- Hornreich, R.M., 1972. The magnetoelectric effect: Materials, physical aspects, and applications. *IEEE Transactions on Magnetics* 8, 584-589.
- Hou, S.L., Bloembergen, N., 1965. Paramagnetoelectric Effects in $\text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$. *Physical Review* 138, A1218-A1226.
- Hung, P.Y., Lau, K.T., Cheng, L.K., Leng, J.S., Hui, D., 2018. Impact response of hybrid carbon/glass fibre reinforced polymer composites designed for engineering applications. *Composites Part B-Engineering* 133, 86-90.
- Inoue, J.-I., Yanagihara, H., Kita, E., 2014. Magnetic anisotropy and magnetostriction in cobalt ferrite with lattice deformation. *Materials Research Express* 1, 046106.
- Jasiuk, I., Tong, Y., 1989. Effect of interface on the elastic stiffness of composites. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD* 100, 49 - 54.
- Jiang, C.P., Xu, Y.L., Cheung, Y.K., Lo, S.H., 2004. A rigorous analytical method for doubly periodic cylindrical inclusions under longitudinal shear and its application. *Mechanics of Materials* 36, 225-237.
- Kambale, R.C., Jeong, D.-Y., Ryu, J., 2012. Current Status of Magnetoelectric Composite Thin/Thick Films. *Advances in Condensed Matter Physics* 2012, 15.
- Kari, S., 2007. Micromechanical Modelling and Numerical Homogenization of Fibre and Particle Reinforced Composites, *Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 309*, Dusseldorf: VDI Verlag.
- Kuo, H.-Y., 2011. Multicoated elliptic fibrous composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. *International Journal of Engineering Science* 49, 561-575.
- Kuo, H.-Y., Chen, C.-Y., 2015. Decoupling transformation for piezoelectric–piezomagnetic fibrous composites with imperfect interfaces. *International Journal of Solids and Structures* 54, 111-120.

- Kuo, H.-Y., Kuo, Y.-M., 2012. Magnetoelectricity in multiferroic particulate composites with arbitrary crystallographic orientation. *Smart Materials and Structures* 21, 105038.
- Kuo, H.-Y., Pan, E., 2011. Effective magnetoelectric effect in multicoated circular fibrous multiferroic composites. *Journal of Applied Physics* 109, 104901.
- Kuo, H.-Y., Peng, C.-Y., 2013. Magnetoelectricity in coated fibrous composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. *International Journal of Engineering Science* 62, 70-83.
- Kuo, H.-Y., Wang, Y.-L., 2012. Optimization of magnetoelectricity in multiferroic fibrous composites. *Mechanics of Materials* 50, 88-99.
- Kuo, H.Y., Huang, T.Y., 2016. Effective moduli of multiferroic fibrous composites with spring-type imperfect interfaces under generalized plane strain with transverse electromagnetic fields. *International Journal of Solids and Structures* 80, 456 - 464.
- Landau, L.D., Lifshits, E.M., 1981. *Electrodinámica de los medios continuos*. Reverté.
- Lee, J., Boyd, J.G., Lagoudas, D.C., 2005. Effective properties of three-phase electro-magneto-elastic composites. *International Journal of Engineering Science* 43, 790-825.
- Li, J.Y., Dunn, M.L., 1998. Micromechanics of magneto-electroelastic composite materials: Average fields and effective behavior. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 9, 404-416.
- López-Realpozo, J.C., 2012. Caracterización micromecánica de compuestos con condiciones de contacto imperfecto, Departamento de Matemáticas. Facultad de Matemáticas y Computación. Universidad de la Habana, La Habana, Cuba, pp. 1-127.
- López-Realpozo, J.C., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Camacho-Montes, H., Espinosa-Almeyda, Y., Sabina, F.J., Vinh, P.C., 2017. Analysis of mechanical and electrical imperfect contacts in piezoelectric composites. *Mechanics Research Communications*.
- López-Realpozo, J.C., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Sabina, F.J., 2011. Transport properties in fibrous elastic rhombic composite with imperfect contact condition. *International Journal of Mechanical Sciences* 53, 98-107.
- McLaughlin, R., 1977. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science* 15, 237 - 244.
- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21, 571 - 574.
- Nan, C.-W., 1994. Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. *Physical Review B* 50, 6082-6088.
- Nan, C.-W., Bichurin, M.I., Dong, S., Viehland, D., Srinivasan, G., 2008. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions. *Journal of Applied Physics* 103, 031101.
- Nan, C.-W., Liu, G., Lin, Y.H., 2005. Magnetic-field-induced electric polarization in multiferroic nanostructures. *Phys. Rev. Lett.* 94, 197-203.
- Nan, C.e.-W., Li, M., Huang, J.H., 2001. Calculations of giant magnetoelectric effects in ferroic composites of rare-earth-iron alloys and ferroelectric polymers. *Physical Review B* 63.
- Nemat-Nasser, S., Hori, M., 1993. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Academic Press, Elsevier.

- Newnham, R.E., Skinner, D.P., Cross, L.E., 1978. Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites. *Materials Research Bulletin* 13, 525-536.
- O'Dell, T.H., 1970. The electrodynamics of magneto-electric media. North-Holland Pub. Co.; American Elsevier Pub. Co., Amsterdam; New York.
- Otero, J.A., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Sabina, F.J., Monsivais, G., 2013a. Semi-analytical method for computing effective properties in elastic composite under imperfect contact. *International Journal of Solids and Structures* 50, 609-622.
- Otero, J.A., Rodríguez-Ramos, R., Monsivais, G., Stern, C., Lebon, F., 2013b. Interfacial waves between piezoelectric and piezomagnetic half-spaces with magneto-electro-mechanical imperfect interface. *Philosophical Magazine Letters* 93, 413-421.
- Otero, J.A., Rodríguez-Ramos, R., Monsivais, G., Stern, C., Martínez, R., Dario, R., 2014. Interfacial waves between two magneto-electro-elastic half-spaces with magneto-electro-mechanical imperfect interface. *Philosophical Magazine Letters* 94, 629-638.
- Otero, J.A., Rodríguez-Ramos, R., G., M., 2017. Computation of effective properties in elastic composites under imperfect contact with different inclusion shapes. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40, 3290--3310.
- Palneedi, H., Annapureddy, V., Priya, S., Ryu, J., 2016. Status and Perspectives of Multiferroic Magnetoelectric Composite Materials and Applications. *Actuators* 5.
- Parandoush, P., Lin, D., 2017. A review on additive manufacturing of polymer-fiber composites. *Composite Structures* 182, 36-53.
- Parton, V.Z., Kudryavtsev, B.A., 1993. *Engineering Mechanics of Composite Structures*. CRC Press, Boca Raton
- Pereira, T., Guo, Z.H., Nieh, S., Arias, J., Hahn, H.T., 2009. Energy Storage Structural Composites: a Review. *Journal of Composite Materials* 43, 549-560.
- Petrov, V.M., Srinivasan, G., Laetsin, U., Bichurin, M.I., Tuskov, D.S., Paddubnaya, N., 2007. Magnetoelectric effects in porous ferromagnetic-piezoelectric bulk composites: Experiment and theory. *Physical Review B* 75, 174422.
- Pobedrya, B.E., 1984. *Mechanics of Composite Materials*. Moscow State University Press (in Russian).
- Priya, S., Islam, R., Dong, S., Viehland, D., 2007. Recent advancements in magnetoelectric particulate and laminate composites. *Journal of Electroceramics* 19, 149-166.
- Rado, G.T., Folen, V.J., 1961. Observation of the Magnetically Induced Magnetoelectric Effect and Evidence for Antiferromagnetic Domains. *Physical Review Letters* 7, 310-311.
- Rao, K.S., Choudary, G., Rao, K.H., Sujatha, C., 2015. Structural and Magnetic Properties of Ultrafine CoFe_2O_4 Nanoparticles. *Procedia Materials Science* 10, 19 - 27.
- Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., 2001. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents—I. Elastic and square symmetry. *Mechanics of Materials* 33, 223-235.
- Rodríguez-Ramos, R., de Medeiros, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Otero, J.A., Tita, V., 2013. Different approaches for calculating the effective elastic properties in composite materials under imperfect contact adherence. *Composite Structures* 99, 264-275.

- Rodríguez Ramos, R., Otero Hernández, J.A., Bravo Castellero, J., Sabina, F.J., 1996. Electromechanical properties of laminated piezoelectric composites. *Mechanics of Composite Materials* 32, 286 - 291.
- Ryu, J., Priya, S., Uchino, K., Kim, H.-E., 2002. Magnetoelectric Effect in Composites of Magnetostrictive and Piezoelectric Materials. *Journal of Electroceramics* 8, 107-119.
- Ryu, J., Vázquez Carazo, A., Uchino, K., Hyoun-Ee, K., 2001. Magnetoelectric Properties in Piezoelectric and Magnetostrictive Laminate Composites. *Japanese Journal of Applied Physics* 40, 4948.
- Saad, M.H., 2005. *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington (Mass.).
- Safri, S.N.A., Sultan, M.T.H., Jawaid, M., Jayakrishna, K., 2018. Impact behaviour of hybrid composites for structural applications: A review. *Composites Part B-Engineering* 133, 112-121.
- Salazar-Kuri, U., Estevez, J.O., Silva-González, N.R., Pal, U., Mendoza, M.E., 2017. Structure and magnetic properties of the $\text{Co}_{1-x}\text{Ni}_x\text{Fe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3$ core-shell nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 442, 247-254.
- Sevostianov, I., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Sabina, F.J., 2012. Connections between different models describing imperfect interfaces in periodic fiber-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures* 49, 1518 - 1525.
- Shi, Y., Wan, Y., Zhong, Z., 2014. Variational bounds for the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites with electromechanical coupling spring-type interfaces. *Mechanics of Materials* 72, 72 - 93.
- Shi, Y., Wan, Y., Zhong, Z., 2016. Effective properties of coated fibrous piezoelectric composites with spring-type interfaces under anti-plane mechanical and in-plane electrical loads. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy* 59, 104611.
- Shirbani, M.M., Shishesaz, M., Sedighi, H.M., Hajnayeb, A., 2017. Parametric modeling of a novel longitudinal vibration-based energy harvester using magneto-electro-elastic materials. *Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems* 23, 5989-6004.
- Sixto-Camacho, L.M., 2010. Homogeneización de compuestos termo-magneto-electro-elásticos con estructura periódica, Departamento de Matemáticas. Universidad de la Habana, Ciudad de la Habana, Cuba, p. 86.
- Sixto-Camacho, L.M., Bravo-Castillero, J., Brenner, R., Guinovart-Díaz, R., Mechkour, H., Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., 2013. Asymptotic homogenization of periodic thermo-magneto-electro-elastic heterogeneous media. *Computers & Mathematics with Applications* 66, 2056-2074.
- Sixto-Camacho, L.M., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Pérez-Fernández, L.D., Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., 2015. Exact relations for the anti-plane effective magneto-electro-elastic coefficients of two-phase fibrous composites. *Mechanics Research Communications* 70, 42-48.
- Sladek, J., Sladek, V., Pan, E., 2017. Effective properties of coated fiber composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 28, 97-107.

- Sreenivasulu, G., Petrov, V.M., Fetisov, L.Y., Fetisov, Y.K., Srinivasan, G., 2012. Magnetolectric interactions in layered composites of piezoelectric quartz and magnetostrictive alloys. *Physical Review B* 86, 214405.
- Srinivas, S., Li, J.Y., 2005. The effective magnetolectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites. *Acta Materialia* 53, 4135 - 4142.
- Srinivas, S., Li, J.Y., Zhou, Y.C., Soh, A.K., 2006. The effective magnetolectroelastic moduli of matrix-based multiferroic composites. *Journal of Applied Physics* 99, 7.
- Srinivasan, G., Priya S., Sun, N.X., 2015. *Composite Magnetoelectrics: Materials, Structures, and Applications*, 1 ed. Woodhead Publishing.
- Sánchez-Palencia, E., 1980. *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- Tadmor, E.B., Phillips, R., Ortiz, M., 2000. Hierarchical modeling in the mechanics of materials. *International Journal of Solids and Structures* 37, 379-389.
- Thankachan, R.M., Raneesh, B., Mayeen, A., Karthika, S., Vivek, S., Nair, S.S., Thomas, S., Kalarikkal, N., 2018. Room temperature magnetolectric coupling effect in CuFe_2O_4 - BaTiO_3 core-shell and nanocomposites. *Journal of Alloys and Compounds* 731, 288-296.
- Tong, Z.H., Lo, S.H., Jiang, C.P., Cheung, Y.K., 2008. An exact solution for the three-phase thermo-electro-magneto-elastic cylinder model and its application to piezoelectric-magnetic fiber composites. *International Journal of Solids and Structures* 45, 5205 - 5219.
- Torquato, S., 2002. *Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties*. Springer, New York.
- Van den Boomgaard, J., Born, R.A.J., 1978. A sintered magnetolectric composite material BaTiO_3 - $\text{Ni}(\text{Co}, \text{Mn})\text{Fe}_2\text{O}_4$. *Journal of Materials Science* 13, 1538-1548.
- Van den Boomgaard, J., Terrell, D.R., Born, R.A.J., Giller, H.F.J.I., 1974. An in situ grown eutectic magnetolectric composite material. *Journal of Materials Science* 9, 1705-1709.
- Van den Boomgaard, J., Van Run, A.M.J.G., Van Suchtelen, J., 1976(a). Magnetolectricity in piezoelectric-magnetostrictive composites. *Ferroelectrics* 10, 295-298.
- Van den Boomgaard, J., van Run, A.M.J.G., Van Suchtelen, J., 1976(b). Piezoelectric-piezomagnetic composites with magnetolectric effect. *Ferroelectrics* 14, 727-728.
- Van Run, A.M.J.G., Terrell, D.R., Scholing, J.H., 1974. An in situ grown eutectic magnetolectric composite material. *Journal of Materials Science* 9, 1710-1714.
- Van Suchtelen, J., 1972. Product properties: a new application of composite materials. *Philips Research Reports* 27, 28 - 37.
- Vopson, M.M., Fetisov, Y.K., Caruntu, G., Srinivasan, G., 2017. Measurement Techniques of the Magneto-Electric Coupling in Multiferroics. *Materials* 10, 963.
- Wang, H.M., Ding, H.J., 2006. Transient responses of a magneto-electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 25, 965-980.
- Wang, J., Chen, L., Fang, S., 2003. State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Solids and Structures* 40, 1669-1680.
- Wang, J., Duan, H.L., Zhang, Z., Huang, Z.P., 2005. An anti-interpenetration model and connections between interphase and interface models in particle-reinforced composites. *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 701-718.

- Wang, X., Pan, E., 2007. Magnetoelectric effects in multiferroic fibrous composite with imperfect interface. *Physical Review B* 76, 214107.
- Wang, Y., Hu, J., Lin, Y., Nan, C.-W., 2010. Multiferroic magnetoelectric composite nanostructures. *NPG Asia Mater* 2, 61-68.
- Wang, Y., Li, J., Viehland, D., 2014a. Magnetoelectrics for magnetic sensor applications: status, challenges and perspectives. *Materials Today* 17, 269 - 275.
- Wang, Y., Su, Y., Li, J., Weng, G.J., 2015. A theory of magnetoelectric coupling with interface effects and aspect-ratio dependence in piezoelectric-piezomagnetic composites. *Journal of Applied Physics* 117, 164106.
- Wang, Y., Xia, X.D., Weng, G.J., 2017. Magnetoelectric coupling and interface effects of multiferroic composites under stress-prescribed boundary condition. *Reviews on Advanced Materials Science* 48, 78-90.
- Wang, Y.-Z., 2015. Influences of imperfect interface on effective magnetoelectric properties in multiferroic composites with elliptical fibers. *Smart Materials and Structures* 24, 045021.
- Wang, Z., Zhu, J., Jin, X.Y., Chen, W.Q., Zhang, C., 2014b. Effective moduli of ellipsoidal particle reinforced piezoelectric composites with imperfect interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 65, 138-156.
- Wu, T.-L., Huang, J.H., 2000. Closed-form solutions for the magnetoelectric coupling coefficients in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. *International Journal of Solids and Structures* 37, 2981-3009.
- Würkner, M., Berger, H., Gabbert, U., 2013. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. *International Journal of Engineering Science* 63, 1-9.
- Xiao, J.H., Xu, Y.L., Zhang, F.C., 2016. Generalized self-consistent electroelastic estimation of piezoelectric nanocomposites accounting for fiber section shape under antiplane shear. *Acta Mechanica* 227, 1381-1392.
- Xu, Y., Xiao, J., Jia, J., Qiu, P., Zhao, Q., 2014. An analytical method for piezoelectric composites containing doubly periodic piezoelectric fibers with ring-shaped cross-section under antiplane shear and its application. *Computational Materials Science* 88, 7-13.
- Xu, Y.L., Xiao, J.H., 2016. An analytical method for predicting the anti-plane effective magneto-electroelastic coefficients of composites containing doubly periodic multicoated fibers. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 96, 477-490.
- Yan, P., Jiang, C.P., Song, F., 2011. An eigenfunction expansion-variational method for the anti-plane electroelastic behavior of three-phase fiber composites. *Mechanics of Materials* 43, 586-597.
- Yan, P., Jiang, C.P., Song, F., 2013. Unified series solution for the anti-plane effective magneto-electroelastic moduli of three-phase fiber composites. *International Journal of Solids and Structures* 50, 176-185.
- Yang, H., Zhang, G., Lin, Y., 2015. Enhanced magnetoelectric properties of the laminated BaTiO₃/CoFe₂O₄ composites. *Journal of Alloys and Compounds* 644, 390-397.
- Zheng, H., Wang, J., Lofland, S.E., Ma, Z., Mohaddes-Ardabili, L., Zhao, T., Salamanca-Riba, L., Shinde, S.R., Ogale, S.B., Bai, F., Viehland, D., Jia, Y., Schlom, D.G., Wuttig, M.,

- Roytburd, A., Ramesh, R., 2004. Multiferroic BaTiO₃-CoFe₂O₄ Nanostructures. *Science* 303, 661.
- Zhong, Y.F., Qin, W.Z., Yu, W.B., Zhou, X.P., Jiao, L.C., 2015. Variational asymptotic homogenization of magneto-electro-elastic materials with coated fibers. *Composite Structures* 133, 300-311.
- Zhou, H.-M., Li, M.-H., Li, X.-H., Zhang, D.-G., 2016. An analytical and explicit multi-field coupled nonlinear constitutive model for Terfenol-D giant magnetostrictive material. *Smart Materials and Structures* 25, 085036.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., 1989. *The finite element method*, Fourth Edition ed.