





**“Metodología de Confiabilidad Weibull para Elementos Mecánicos Basado en el Daño Acumulado Generado por Vibración Aleatoria”**

**MARÍA MAGDALENA HERNÁNDEZ RAMOS**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ  
INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Y DE MANUFACTURA  
DOCTORADO EN TECNOLOGÍA**



**Metodología de Confiabilidad Weibull para Elementos Mecánicos Basado  
en el Daño Acumulado Generado por Vibración Aleatoria**

**Tesis que presenta**

**MARÍA MAGDALENA HERNÁNDEZ RAMOS**

**Becaria**

**Como requisito para obtener el grado de  
DOCTOR EN TECNOLOGÍA**

**Director de tesis**

**Dr. Manuel Román Piña Monarrez**

**Codirector**

**Dr. Rey David Molina Arredondo**

**Ciudad Juárez, Chihuahua, marzo 2026**

## **DEDICATORIA**

**A Dios**

**A mi Esposo**  
Jorge Madrigal

**A mis Hijos**  
Eden y Aria

**A mis Padres**  
Hermerejildo Hernández y Hermelinda Ramos

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Manuel Román Piña Monarrez, por compartir sus conocimientos, experiencias, orientación y paciencia infinita en este proceso de mi investigación que han sido esencial para mi progreso profesional y académico.

A la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ), especialmente al Instituto de Ingeniería y Tecnología, IIT, por su respaldo para terminar este doctorado.

Al SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación), por el respaldo económico que brindó durante toda la duración del programa doctoral.

# Contenido

RESUMEN .....	1
1. INTRODUCCIÓN .....	3
1.1. Antecedentes .....	4
1.2. Planteamiento del Problema .....	5
1.2.1. Descripción del Problema .....	5
1.3. Objetivo General .....	7
1.3.1. Objetivos Particulares .....	7
1.4. Hipótesis General .....	8
1.4.1. Hipótesis Particulares .....	8
1.5. Justificación .....	8
1.6. Alcances y Limitaciones .....	13
1.6.1. Alcances .....	13
1.6.2. Limitaciones .....	14
2. MARCO TEÓRICO .....	15
2.1. Vibración .....	16
2.1.1. Componentes Mecánicos .....	16
2.1.2. Fatiga .....	17
2.1.3. Modo de Fallas .....	18
2.1.4. Variables que Generan Fatiga .....	19
2.1.5. Tipos de Vibraciones .....	19
2.2. Modelos Físicos para Vibración .....	25

2.2.1. Movimiento Armónico Simple .....	25
2.2.2. Péndulo .....	29
2.2.3. Curva S-N .....	30
2.2.4. Modelo de Basquin .....	32
2.2.5. Ley de Potencia Inversa .....	33
2.3. Herramientas de Confiabilidad en Vibración.....	35
2.3.1. Funciones de Confiabilidad .....	36
2.3.1.1. Función de Densidad de Probabilidad (pdf).....	36
2.3.1.2. Función de Distribución Acumulada (cdf).....	36
2.3.1.3. Función de Confiabilidad R(t) .....	36
2.3.1.4. Función de Riesgo instantáneo $\lambda(t)$ .....	37
2.3.1.5. Función de Riesgo Acumulado H(t).....	37
2.3.2. Distribución Weibull .....	38
2.3.3 Proceso Poisson no Homogéneo .....	40
2.3.4. Plan de Prueba de Vibración .....	41
2.3.4.1. Plan a Cero Fallas (Apéndice C).....	41
2.3.4.2. Plan Para Muestras Insuficientes (Apéndice I).....	42
2.3.4.3. Plan Para Daño Acumulado Por la Regla de Miner (Apéndice O).....	45
2.4. Revisión de Literatura.....	45
2.4.1. Modelos Para Acumular el Daño .....	46
2.4.1.1. Regla de Miner.....	46
2.4.1.2. Modelo No Lineal .....	49
2.4.1.3. Modelo de Estrés Variante .....	51

2.4.1.4. Modelo de Daño acumulado .....	52
3. METODOLOGÍA .....	53
3.1. Metodología Actual.....	55
3.2. Metodología Desarrollada.....	57
4. RESULTADOS Y APLICACIÓN.....	64
4.1 Caso 1.....	64
4.2. Caso 2.....	75
4.3 Validación de los Objetivos. ....	87
5. CONCLUSIONES .....	89
BIBLIOGRAFÍA .....	90
APÉNDICES.....	94
Apéndice A: Participación en congreso .....	94
Apéndice B: Artículos publicados en revistas JCR.....	95
Apéndice C: Estancia de investigación.....	97

## Lista de Tablas

Tabla 1.1. Perfil de entrada .....	6
Tabla 1.2. Daño acumulado. ....	7
Tabla 1.3. Parámetros de entrada .....	10
Tabla 2.1. Tiempo en la carretera de Belgian Block .....	45
Tabla 3.1. Perfil de prueba para PSD de la Figura 3.4.....	56
Tabla 4.1. Perfil de entrada .....	66
Tabla 4.2. Aceleración de respuesta .....	67
Table 4.3. Perfil de vibración con esfuerzo de flexión .....	69
Tabla 4.4. Resultados de ciclos a la falla $Ni$ .....	70
Tabla 4.5. Ciclos aplicados $ni$ Rainflow.....	70
Tabla 4.6. Resultados del cálculo de los daños acumulados.....	71
Tabla 4.7. Área del perfil de prueba.....	71
Tabla 4.8. Resumen del análisis de daño acumulado por bloques $\beta = 2.5175$ . ....	73
Tabla 4.9. Confiabilidad de cada bloque.....	74
Tabla 4.10. Perfil de entrada .....	76
Tabla 4.11. Aceleración de respuesta .....	77
Table 4.12. Perfil de vibración con esfuerzo de flexión .....	79
Tabla 4.13. Resultados de ciclos a la falla $Ni$ .....	79
Tabla 4.14. Ciclos aplicados $ni$ Rainflow.....	80
Tabla 4.15. Resultados del cálculo de los daños acumulados.....	80
Tabla 4.16. Área del perfil de prueba.....	82
Tabla 4.17. Resumen del análisis de daño acumulado por bloques $\beta = 2.1564$ . ....	83

Tabla 4.18. Confiabilidad de cada bloque.....	86
---	----

## Lista de Figuras

Figura 1.1. Perfil de prueba.....	11
Figura 2.1. Diagrama de marco teórico .....	15
Figura 2.2. Tipos de vibraciones.....	20
Figura 2.3. Ejemplo de vibración libre .....	21
Figura 2.4. Vibración determinista y aleatoria.....	22
Figura 2.5. Señales.....	23
Figura 2.6. a) Gráfica típica de vibración aleatoria, b) Serie de curvas sinusoidales .....	24
Figura 2.7. Movimiento armónico simple.....	25
Figura 2.8. Representación sinusoidal .....	29
Figura 2.9. Péndulo simple .....	30
Figura 2.10. Gráfico de fatiga de flexión.....	31
Figura 2.11. Modelo no lineal simple .....	33
Figura 2.12. Efecto de diferentes valores de $n$ . .....	34
Figura 2.13. Función de riesgo .....	38
Figura 2.14. Funciones de riesgo .....	39
Figura 2.15. Curva S-N.....	47
Figura 2.16. Daño lineal a diferentes niveles de estrés.....	48
Figura 3.1. Diagrama general de la metodología desarrollada. ....	53
Figura 3.2. Diagrama en extenso de la metodología desarrollada. ....	54
Figura 3.3. Datos de vibración en el dominio del tiempo. ....	55
Figura 3.4. PSD de datos de vibración en el dominio de la frecuencia. ....	56
Figura 4.1. Viga en cantiléver de aluminio .....	65

Figura 4.2 Síntesis de aceleración.....	67
Figura 4.3. Comportamiento de la curva de daño.....	71
Figura 4.4. Soporte sometido a Fatiga por vibración aleatoria.....	75
Figura 4.5 Síntesis de aceleración.....	77
Figura 4.6. Comportamiento de la curva de daño.....	81

## Resumen

Esta investigación se centra en el análisis de elementos mecánicos sujetos a vibración aleatoria para determinar su confiabilidad. La determinación de la confiabilidad del elemento mecánico es necesaria dado que la vibración aleatoria se comporta de manera no predecible, lo que hace difícil usar los modelos actuales de relación vida esfuerzo para determinar la confiabilidad del elemento. Así, en esta investigación usamos la distribución Weibull para realizar el análisis de confiabilidad, el cual está basado en el daño acumulado generado por vibración.

Con el paso del tiempo, se han creado varios modelos de daño por fatiga para mejorar la exactitud en la predicción de la vida útil de los elementos mecánicos. Tales como la regla de Miner y el modelo de daño no lineal. Debido a que la Regla de Miner, se basa en el supuesto de que la resistencia a la fatiga se ve afectada de manera lineal por la vibración, este método se considera ineficiente para modelar el efecto de la vibración. Así, debido a que el comportamiento de la vibración es no lineal, han sido desarrollados una amplia gama de modelos no lineales tales como el modelo de curva de daño presentado por el Dr. Barraza. Este modelo de curva de daño es el que se tomó en esta investigación como base para la determinación del daño acumulado generado por vibración aleatoria.

De esa manera, aunque el daño ya se acumula de manera eficiente, debido a que la confiabilidad del elemento mecánico sigue siendo desconocida, en esta investigación el daño acumulado por bloques hasta  $D = 1$ , fue utilizado en la distribución Weibull para determinar en base a el daño, la confiabilidad del elemento mecánico y la confiabilidad de cada bloque. Así, la contribución de esta investigación consiste en; **a)** la metodología desarrollada para determinar la familia Weibull que representa a la vibración y la familia Weibull que representa

a la resistencia del material del elemento mecánico. **b)** en el uso del coeficiente de fatiga de la curva S-N para relacionar los efectos de la vibración con la resistencia a través del parámetro de forma Weibull, y finalmente **c)** en la determinación de un parámetro de forma Weibull común a la familia Weibull de la vibración y a la familia Weibull de la resistencia.

Así, la metodología desarrollada es aplicada a un caso práctico donde se detalla y valida su aplicación numérica. Por último, se exponen las conclusiones y recomendaciones que evidencian la eficacia y generalidad de la presente investigación.

## 1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación se enfoca en determinar la confiabilidad de un elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria. La metodología desarrollada se basa en el daño acumulado por vibración y en el uso de la distribución Weibull para el cálculo de los índices de confiabilidad. La necesidad de la metodología desarrollada se centra en el hecho de que los elementos mecánicos sujetos a vibración aleatoria fallan por fatiga. Fenómeno el cual desde los inicios de su análisis ha sido un fenómeno complejo de analizar y aunque éste es de naturaleza estadística actualmente a su análisis no se le puede asociar una distribución para los cálculos de los índices de confiabilidad. Los antecedentes de los avances de investigación enfocados en asociar y/o usar una distribución para determinar la confiabilidad del elemento son los siguientes.

Debido a su simplicidad intrínseca, la regla de Miner se aplica ampliamente en la predicción de la vida útil de los elementos mecánicos sometidos a fatiga. La regla es conocida como modelo de daño acumulado lineal, y se basa en algunos supuestos básicos que afectan su precisión, como la cantidad de trabajo absorbido a la falla y el trabajo constante absorbido por ciclo. Para superar estas deficiencias Richart y Newmark propusieron el modelo de la curva de daño, el cual correlaciona el daño con la relación de ciclos aplicados y de resistencia del diagrama  $D - n_i/N_i$ . Después, basados en el modelo de la curva de daño y con el fin de mejorar la precisión de la regla de Miner, Marco y Starkey sugirieron la primera teoría no lineal de daño acumulado dependiente de la carga (Santecchia et al., 2016).

Desafortunadamente, aunque hasta este punto solo se logró obtener el daño acumulado de un elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria, la incorporación de una distribución de

probabilidad para la determinación de la confiabilidad del elemento aun no es posible. Así, los antecedentes del desarrollo de un método para determinar la confiabilidad del elemento son los siguientes.

### **1.1. Antecedentes**

Langer (1937) propuso separar el proceso de daño por fatiga en dos etapas, de iniciación y propagación de grietas. Basado en esta idea, Miner (1945) formuló la misma hipótesis de Palmgren, la cual se conoce ampliamente como la regla de Miner (Miner, 1945). En 1976, Subramanyan (1976) calculó el daño generado por vibración en base a la amplitud de la tensión de referencia  $S_{ref}$  y al límite de fatiga  $S_e$ , y Hashin (1980) uso en el análisis la vida de fatiga  $N_e$  que corresponde al límite de fatiga  $S_e$ . Después, basados en estas ideas, Manson and Halford (1981) propusieron la regla de daño lineal doble para acumular el daño generado por vibración (Lee et al., 2013). Dado que en este modelo de daño lineal doble el exponente de 0.4 era constante, y no se consideraba la secuencia de carga en el análisis, Barraza (2022) para el daño acumulado generado por fatiga debido a la vibración aleatoria desarrolló un exponente dinámico para acumular este daño (Barraza et al., 2022). Desafortunadamente, aunque en los análisis realizados por Barraza (2022) el daño ya se acumula considerando la secuencia de la carga y se usa un exponente dinámico, debido a que no se asocia una distribución de probabilidad al análisis, aún no es posible determinar la confiabilidad del elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria.

Así, las normas actuales como la GMW3172 (2008), destinado a dispositivos electrónicos, presenta en sus apéndices C, D, E y O métodos para demostrar la confiabilidad de un elemento sujeto a vibración aleatoria, considerando un nivel de confiabilidad de  $CL =$

0.50, con una confiabilidad mínima de  $R(t) = 0.97$ , sin considerar una distribución para la estimación de los índices de confiabilidad. Adicionalmente, la norma ISO 16750-3 (2012) la cual aplica a componentes mecánicos, presenta los perfiles de prueba recomendados para la realización de las pruebas de vibración de partes ubicadas en el chasis, cabina y motor de un automóvil, las cuales se describen en el ISO 16750-1. Lamentablemente, debido a que estos perfiles no consideran la geometría y masa del producto, la obtención del daño acumulado directamente de estos perfiles no es posible. Así, para incorporar el efecto de la geometría y masa al perfil base de la norma, se utiliza software como lo es la librería de vibrationdata instalada en el Matlab para incorporar este efecto a la acumulación del daño generado.

Finalmente, debido a que al utilizar el software es posible determinar el daño acumulado de manera eficiente, el objetivo de esta investigación se enfocó en el desarrollo de la metodología que permita hacer uso del daño acumulado en la distribución Weibull para la determinación de los índices de confiabilidad del elemento analizado. Así, para el desarrollo de la metodología, el problema a resolver es el siguiente.

## **1.2. Planteamiento del Problema**

Actualmente basado en el daño acumulado generado por vibración aleatoria, no es posible determinar la confiabilidad de un elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria.

### **1.2.1. Descripción del Problema**

Para mostrar que actualmente no es posible utilizar el daño acumulado generado por vibración aleatoria para determinar la confiabilidad de un elemento mecánico, se hace uso de los datos

numéricos del caso de análisis presentado en la sección 4.1. Del cual se da la descripción de este a continuación.

Se analizó una viga en cantiléver con propiedades mecánicas de aluminio Al 6061-T6. La viga en cantiléver está sometido a una carga de 2Nw el elemento mecánico debe ser capaz de funcionar en un entorno de vibración aleatoria de ruido blanco usando una función de densidad espectral (por sus siglas en inglés PSD) de entrada de  $0.475 \text{ g}^2/\text{Hz}$  en el rango de 20 a 200 Hz durante un período de 4 horas. La Tabla 1.1 muestra los parámetros principales del perfil de prueba.

**Tabla 1.1. Perfil de entrada**

<b>Frecuencia (HZ)</b>	<b>Aceleración (G)</b>	<b>Aceleración [G<sup>2</sup>/Hz]</b>
20	3.082	0.475
50	4.873	0.475
80	6.164	0.475
120	7.550	0.475
150	8.441	0.475
200	9.747	0.475

A este perfil inicial, se le incorpora el efecto del tiempo de prueba de 4 horas a través de la simulación realizada en Matlab. La aceleración de respuesta resultante se presenta en la Tabla 4.2 de la sección 4.2. De igual forma la incorporación del efecto de la geometría, la masa y la resonancia (ver sec. 4.1.2.) se realiza a través de la fórmula 4.3 del factor dinámico dado en la sección 4.1.3. En consecuencia, los esfuerzos generados por la vibración son los dados en la Tabla 4.3 de la sección 4.1.4. Luego, de la curva S/N del material se determinaron los ciclos a la falla esperados ( $N_i$ ) y del algoritmo Rainflow de la rutina de Matlab se determinaron

los ciclos aplicados ( $n_i$ ). Finalmente, basados en el modelo de daño no lineal (ecuación 1.4), el daño acumulado por vibración es el dado en la Tabla 1.2.

**Tabla 1.2. Daño acumulado.**

	20 Hz		50 Hz		80 Hz		120 Hz		150 Hz		200 Hz
Bloque No.	$D_1$	$n_{eq}+n_2$	$D_{1+2}$	$n_{eq}+n_3$	$D_{1+2+3}$	$n_{eq}+n_4$	$D_{1+2+3+4}$	$n_{eq}+n_5$	$D_{1+2+3+4+5}$	$n_{eq}+n_6$	$D_{1+2+3+4+5+6}$
1	7.88E-06	9.84E+06	8.18E-06	2.07E+06	1.07E-05	1.46E+05	1.36E-03	2.53E+05	8.04E-02	2.99E+06	9.27E-02
2	9.27E-02	6.37E+07	9.32E-02	1.40E+07	9.70E-02	1.80E+06	1.11E-01	6.00E+05	1.91E-01	4.09E+06	2.11E-01
3	2.11E-01	7.51E+07	2.12E-01	1.66E+07	2.19E-01	2.78E+06	2.40E-01	1.00E+06	3.19E-01	4.94E+06	3.47E-01
4	3.47E-01	8.30E+07	3.49E-01	1.84E+07	3.59E-01	3.64E+06	3.84E-01	1.46E+06	4.63E-01	5.66E+06	4.99E-01
5	4.99E-01	8.92E+07	5.01E-01	1.98E+07	5.15E-01	4.44E+06	5.44E-01	1.96E+06	6.23E-01	6.32E+06	6.66E-01
6	6.66E-01	9.45E+07	6.69E-01	2.11E+07	6.87E-01	5.20E+06	7.19E-01	2.52E+06	7.99E-01	6.92E+06	8.48E-01
7	8.48E-01	9.92E+07	8.51E-01	2.21E+07	8.73E-01	5.95E+06	9.09E-01	3.11E+06	9.88E-01	7.49E+06	1.05E+00

Fuente: Tomado de (Hernández Ramos et al., 2025).

De la Tabla 1.2 tenemos que, aunque este daño es representativo de la vibración ya que este considera el efecto del tiempo, la geometría, el peso y la resonancia, y además se acumuló hasta que el daño es  $D = 1$ , es importante resaltar que, en base a estos valores de daño, sin asociar una distribución de probabilidad, no es posible determinar la confiabilidad del elemento mecánico analizado. De esta forma los objetivos de la presente investigación se plantean de la siguiente manera.

### 1.3. Objetivo General

Crear una metodología para determinar la confiabilidad de un elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria, que esté basada en el daño acumulado.

#### 1.3.1. Objetivos Particulares

- Determinar la distribución Weibull del estrés que represente a los Grms del perfil de vibración.

- Determinar la distribución Weibull de la resistencia del material considerando el efecto del estrés de vibración aplicado.
- Utilizar la distribución del estrés y la distribución de la resistencia para determinar los índices de confiabilidad del elemento mecánico.

## **1.4. Hipótesis General**

La metodología Weibull desarrollada basada en el daño acumulado permite determinar la confiabilidad del elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria.

### **1.4.1. Hipótesis Particulares**

- Los parámetros de la distribución Weibull determinados de los Grms del perfil de prueba representa a la distribución del estrés.
- La combinación de los esfuerzos del estrés y las propiedades del material son suficientes para determinar los parámetros de la distribución de la resistencia.
- Utilizando el parámetro de forma Weibull común a la distribución del estrés y a la distribución de la resistencia en los valores de daño acumulado es posible determinar los índices de confiabilidad que estos elementos de daño representan.

## **1.5. Justificación**

En esta sección, se indica la necesidad de una metodología de confiabilidad Weibull para elementos mecánicos basado en el daño acumulado generado por vibración aleatoria, esto debido a que en los análisis actuales de vibración se desconoce la confiabilidad del elemento.

Esta confiabilidad permanece desconocida porque para estimarla se necesitan datos de vida y debido a que los análisis de vibración se basan en la frecuencia y la amplitud observadas las cuales no son datos de vida, entonces en base a estas variables no es posible estimarla. Donde, la frecuencia natural definida en términos de ciclos por segundo (*Hz*) está dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{m} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

y la amplitud en términos de magnitud está dada por

$$A = \frac{2\pi^2 F^2 D}{G} \quad (1.2)$$

Así, dado que la amplitud y la frecuencia son las variables de entrada para los análisis de vibración, pero debido a que estas variables no representan el efecto de fatiga que se genera en el elemento, en la práctica para cuantificarlo se utiliza el daño acumulado como la variable representativa de dicho efecto, el cual debido a que la amplitud y la frecuencia son ambas variantes, también se comporta variante. Así, que para su análisis se requiere un modelo de acumulación de daño variante. Actualmente el modelo de daño acumulado variante instalado en el software Alta Pro está dado por

$$L(V(t)) = C \cdot e^{\left( \frac{B}{V(t)} \right)} \quad (1.3)$$

donde;

$L$  es el daño,  $V(t)$  es el estrés,  $C$  y  $B$  son parámetros del modelo a ser estimados.

Desafortunadamente, para los análisis de vibración el modelo definido en la ecuación 1.3 no es eficiente para determinar la confiabilidad del elemento mecánico debido a que este requiere tener entradas de tiempos de vida y un perfil de rangos de vida con su estrés asociado. Esto debido a que el perfil de entrada de los análisis de vibración son la amplitud y la frecuencia y estas no son tiempos de vida. Así que, como para usar el modelo del software Alta, este requiere de entrada el perfil de rango de vida, el estrés asociado y los tiempos de vida, entonces con el objetivo de utilizar este modelo se usan los  $n_i$  como perfil de rango de vida, los esfuerzos dados por el factor dinámico (ver secc. 4.1.3, Ecuación 4.3) como el estrés asociado y los tiempos  $N_i$  como los tiempos de vida del elemento en el modelo de Alta. De este modo, en la Tabla 1.3 se dan las entradas antes mencionadas las cuales fueron usadas para el modelo en el software Alta.

**Tabla 1.3. Parámetros de entrada**

$n_i$	$N_i$	Esfuerzo
110437	1.40E+10	21.578
74884	1.02E+08	46.680
114802	2.28E+07	59.098
137055	6.28E+06	72.341
249066	3.15E+06	80.603
156562	7.37E+06	70.543

Lamentablemente al alimentar los datos de la Tabla 1.3 al software Alta, está no puede estimar los parámetros del modelo de daño acumulado, como se muestra en la Figura 1.1.



**Figura 1.1. Perfil de prueba**

El error presentado para la estimación de los parámetros en el software Alta se debe a que la secuencia del perfil de rango de vida no está en orden creciente, por ejemplo, en el segundo renglón el límite inferior es mayor que el límite superior, por lo que la estimación del parámetro de daño no es posible.

Por otro lado, si aleatoriamente existiera un perfil con la secuencia creciente en sus rangos de vida y por consecuencia el alta no presenta el error arriba mencionado, es importante mencionar que los parámetros estimados no son eficientes para estimar la confiabilidad del elemento debido a que el daño que se estima no contiene el efecto que el primer estrés tiene sobre el estrés de la segunda frecuencia. Esto es debido a que el impacto en el daño del estrés de la primera frecuencia evaluado en la segunda frecuencia es diferente; esta diferencia ocurre debido a que la segunda frecuencia representa un nivel acelerado cuando esta es comparada con la frecuencia anterior.

Así, dado que el daño total generado se acumula debido a dos fuentes, siendo la primera el orden en que aparecen las frecuencias y la segunda el impacto sobre la fatiga que la aparición que dicha frecuencia genera. Con la finalidad de considerar el orden en que aparecen las frecuencias (Barraza et al., 2022) modificó el modelo de daño para en el exponente considerar dicho orden. El modelo desarrollado es,

$$D = \sum_{i=1}^2 D_2 = \left[ \frac{n_2}{N_{2,f}} \right] \left( \frac{N_{2,f}}{N_{1,f}} \right)^{\left[ \frac{\sigma_{1vb}}{\sigma_{2vb}} \right]} \quad (1.4)$$

Finalmente, aunque el modelo de la ecuación 1.4 logra obtener el daño acumulado de manera eficiente dado que logra capturar la ocurrencia de las frecuencias del perfil del elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria (sección 4.1.5. Tabla 4.6) aún solo basado en este modelo no es posible determinar la confiabilidad real del elemento ya que falta considerar el impacto que la aparición de dichas frecuencias genera sobre la fatiga. Por lo que debido a que el modelo del Alta no considera el orden en que aparecen las frecuencias ni el impacto que el estrés de la primera frecuencia tiene sobre la segunda frecuencia, se concluye que el modelo del Alta no es eficiente para estimar la confiabilidad del elemento mecánico.

De igual forma debido a que el modelo definido en la ecuación 1.4 solo considera el orden de las frecuencias, pero falla en considerar el impacto que el estrés de la primera frecuencia tiene sobre la segunda frecuencia, se concluye que, aunque este modelo no es eficiente para determinar la confiabilidad del elemento, el modelo lo puedo usar para acumular eficientemente el daño.

Asimismo, los beneficios que se tienen al determinar la confiabilidad son; debido a que los elementos mecánicos son la base para el funcionamiento y desarrollo de innumerables procesos productivos y desarrollo de tecnología, contar con el índice de confiabilidad del elemento mecánico permite en la práctica, primero minimizar los incidentes y riesgos a las personas que los operan, así como minimizar la afectación al medio ambiente ocasionada por la falla del elemento mecánico. Segundo, en la operación funcional del elemento mecánico, su índice de confiabilidad permite al ingeniero de diseño, de mantenimiento y de producción, establecer el tamaño de muestra a inspeccionar para el plan de prueba requerido en la

inspección y/o validación de la funcionalidad del elemento mecánico, y predecir el número de fallas y el tiempo de falla para con esta información diseñar e implementar estrategias de mantenimiento que minimice los efectos que la ocurrencia de estas fallas puedan tener en el proceso. Tercero, en la fase de diseño contar con el índice de confiabilidad actual del elemento mecánico permite evaluar alternativas de diseño y establecer estrategias de mejoramiento de la confiabilidad para alcanzar algún objetivo específico como puede ser determinar el tiempo de garantía y seleccionar el material de diseño que minimiza las fallas alrededor de un objetivo el cual generalmente es la vida  $B_{10}$ . Por esta y otras razones, el contar con el índice de confiabilidad de un elemento mecánico es vital para las áreas de diseño, producción y mantenimiento de los procesos productivos, y en particular debido a que la vibración aleatoria es la variable que más afecta a los elementos mecánicos, la determinación del índice de confiabilidad del elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria tiene la mayor relevancia práctica y de análisis realizada en esta investigación. Así los alcances y limitaciones de la investigación son.

## **1.6. Alcances y Limitaciones**

Para la presente investigación se mencionan los alcances y delimitaciones, los cuales se enlistan a continuación.

### **1.6.1. Alcances**

- Solo elementos mecánicos del área automotriz
- Solo el daño acumulado por fátiga generada por vibración aleatoria
- Solo el modelo no lineal para el daño acumulado

- Solo la curva S-N
- Solo el algoritmo Rainflow de la rutina Vibration data de Matlab
- Solo la distribución Weibull

### **1.6.2. Limitaciones**

- Solo Matlab.
- Solo Weibull ++
- Solo automotriz
- Solo ISO 16750-3 y GMW3172
- Solo la curva S-N

## 2. MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta la teoría en la que se fundamenta esta investigación, en la Figura 2.1 se muestran los tópicos generales como son; vibración, modelos físicos para vibración, herramientas de confiabilidad en vibración y la revisión de literatura. En la misma Figura 2.1 se observa los subtemas de los tópicos principales.



**Figura 2.1. Diagrama de marco teórico**

Dando inicio con las bases teóricas para esta investigación se presenta el primero concepto el cual consisten en el concepto de vibración, posteriormente se sigue con cada uno de los tópicos mencionados en el diagrama anterior.

## **2.1. Vibración**

Vibración en términos generales se refiere a un movimiento oscilatorio en el que una estructura o cuerpo se desplaza de un lado a otro, puede considerarse sinusoidal o armónica simple (Rao), (Martínez Batista et al., 2017). Por lo tanto, la vibración se refiere a la oscilación en un componente mecánico y se define a través de la frecuencia y la amplitud. La frecuencia se define como el número de ciclos por unidad de tiempo, mientras que la magnitud se define en función de la amplitud en la práctica, las vibraciones no siguen un patrón regular; pueden ser una mezcla de diferentes componentes sinusoidales, todos con amplitudes y frecuencia distintas. Si dice que una vibración es periódica si cada componente de frecuencia es un múltiplo entero de la frecuencia más baja y se repite tras un intervalo de tiempo determinado. La vibración se considera compleja si no existe una relación entera entre los componentes de frecuencias y por lo tanto, no hay periodicidad (Harris & Piersol, 2002b). Por otro lado, si el movimiento continuo no muestra patrones de repetición, se clasifica como movimiento aleatorio (Steinberg, 2000). En la siguiente sección se presentan los diferentes tipos de vibración.

### **2.1.1. Componentes Mecánicos**

Los componentes mecánicos son elementos que forman parte de un sistema o máquina que se utilizan para facilitar o realizar una función específica durante el funcionamiento. Estos elementos pueden ser independientes o ser parte de un conjunto de un ensamble. Al soportar peso, transferir movimientos, cambiar fuerzas o promover interacciones dentro del sistema, cada uno de estos elementos contribuye de manera fundamental al conjunto de la operación

(Budynas & Keith Nisbett, 2015). Una relación de los componentes mecánicos con fatiga se describe enseguida, comenzando con la definición del término de fatiga.

### **2.1.2. Fatiga**

La fatiga es un proceso de deterioro localizado de un elemento causado por cargas cíclicas. Este fenómeno resulta de un proceso acumulativo que involucra la formación, propagación y finalmente, la fractura de una grieta en el componente. Durante el ciclo de carga repetitivo, es posible que se produzca una deformación plástica en una región específica con alta tensión. Esta deformación plástica conlleva daño permanente al componente y provoca el desarrollo de una grieta. Si la grieta alcanza un tamaño suficiente puede superar la capacidad de carga del elemento y producir una falla por tensión al componente al punto de separación (*fatigue testing & analysis*) (*shock & vibration*).

El proceso de fatiga comprende las etapas de nucleación de grietas, crecimiento de grietas cortas, crecimiento de grietas largas y fractura final. El comportamiento a la fatiga está afectado por una variedad de factores. Algunos de los factores más importantes que influyen en la fatiga son las propiedades del material, la velocidad de la carga cíclica, la tensión, la geometría y el historial de deformación previa. (*shock & vibration*).

La falla por fatiga tiene un aspecto similar al de una fractura quebradiza, ya que las superficies de la fractura son planas y perpendiculares a la línea del esfuerzo, sin que se aprecien adelgazamientos evidentes. No obstante, las características de fractura de un fallo por fatiga son muy distintas a las de una fractura estática y frágil, y se manifiestan en tres etapas de desarrollo (Budynas & Keith Nisbett, 2015).

- La primera etapa marca el comienzo de una o más microgrietas causadas por la deformación plástica cíclica. Estas microgrietas luego se propagan de manera cristalográfica, extendiéndose entre dos y cinco granos alrededor del punto de origen.
- En la segunda etapa, las microgrietas se convierten en macrogrietas, formando superficies paralelas que tiene un aspecto similar a mesetas separadas por crestas longitudinales.
- La última etapa tiene lugar en el ciclo de tensión final, cuando el material que queda ya no es capaz de soportar las cargas, lo que provoca una fractura rápida y repentina.

### **2.1.3. Modo de Fallas**

Las fallas mecánicas involucran interacciones complejas de cargas, tiempo y entorno, en el cual el entorno incluye la temperatura, humedad y vibración. Donde las cargas pueden ser monótonas, constantes, variables, uniaxiales, o multiaxiales y la duración de la carga dependerá del tiempo. Uno de los modos de falla mecánicas más común es el exceso de deformación y su estudio se basa en el criterio del esfuerzo cortante máximo. De esta forma las fallas van desde componentes o estructuras simples hasta complejas, por lo tanto, la causa más frecuente de falla mecánica es la falla por fatiga resultado de cargas cíclicas.

Así mismo, la fatiga es un fenómeno impredecible que conduce a la falla de un componente mecánico cuando se encuentra sometido a un nivel de tensión menor que el límite de resistencia del material ( $S_e$ ). A pesar de la aleatoriedad de la fatiga y de que el componente mecánico esté sujeto a cargas cíclicas de amplitud variable, es posible realizar un análisis de

su falla utilizando un enfoque basado en un solo valor de esfuerzo equivalente ( $\sigma_{eq}$ ), y aplicando una teoría de falla (Barraza-Contreras et al., 2020a).

#### **2.1.4. Variables que Generan Fatiga**

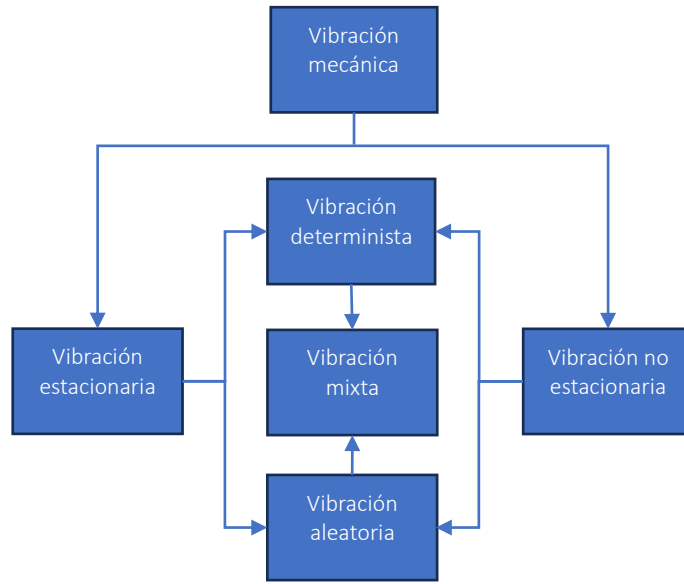
En esta sección se mencionan las variables que generan fatiga a un elemento mecánico basado en la norma GMW3172, de las cuales se dividen en tres grupos;

- Temperatura
- Humedad
- Vibración

La investigación se enfocará en el análisis de la vibración ya que es la que se presenta en componentes y estructuras donde no se desea debido a que conlleva un incremento en los esfuerzos y resultan en la pérdida de energía provocando fallas por fatiga (Beer et al., 2010). Por lo que, en la siguiente sección, se discute que es la vibración, tipos de vibraciones, curva S-N y movimiento armónico simple.

#### **2.1.5. Tipos de Vibraciones**

En la Figura 2.2 se pueden observar las clasificaciones de las vibraciones mecánicas y su clasificación en tres categorías generales, posteriormente se da una breve explicación de cada una de ella.

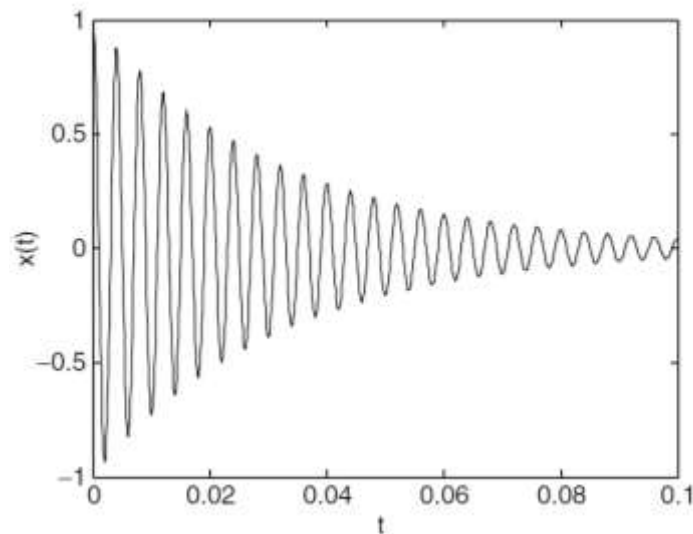


**Figura 2.2. Tipos de vibraciones**

- Vibración estacionaria, sus propiedades básicas no varían con el tiempo, se producen normalmente cuando las condiciones de funcionamiento o ambientales que producen la vibración son invariables en el tiempo.
- Vibración no estacionaria, sus propiedades básicas varían con el tiempo, pero lentamente en relación con la frecuencia más baja de la vibración.
- La vibración determinista sigue un patrón establecido, de tal forma que el valor de la vibración en cualquier momento futuro es totalmente predecible a partir de la historia pasada (Harris & Piersol, 2002a).
- Vibración aleatoria su valor futuro es impredecible, se define en términos estadísticos que permite indicar la probabilidad de que se produzcan determinadas magnitudes y frecuencias.
- Una vibración mixta incluye una combinación de componentes deterministas y aleatorios. Hasta cierto punto la mayoría de los entornos de vibración son mixtos,

aunque a menudo predominará un componente determinista o aleatorio (Schmitz & Smith, 2012).

- La vibración libre se encuentra cuando un cuerpo es desplazado de su posición de equilibrio y se produce una vibración correspondiente. Sin embargo, no existe una fuerza externa a largo plazo que actúe sobre el sistema después de la perturbación inicial. En la Figura 2.3 se puede ver un ejemplo sobre vibración libre donde la magnitud del movimiento oscilante decae con el tiempo y la vibración periódica ocurre a la frecuencia natural.



**Figura 2.3. Ejemplo de vibración libre**

- Por su parte la vibración forzada se aplica al sistema una excitación periódica continua. Después de algunos transitorios iniciales (es decir, la solución homogénea de la ecuación diferencial), el sistema alcanza un comportamiento de estado estacionario (es decir, la solución particular).
- Vibración lineal, si todos los componentes del sistema bajo análisis se comportan de manera lineal.

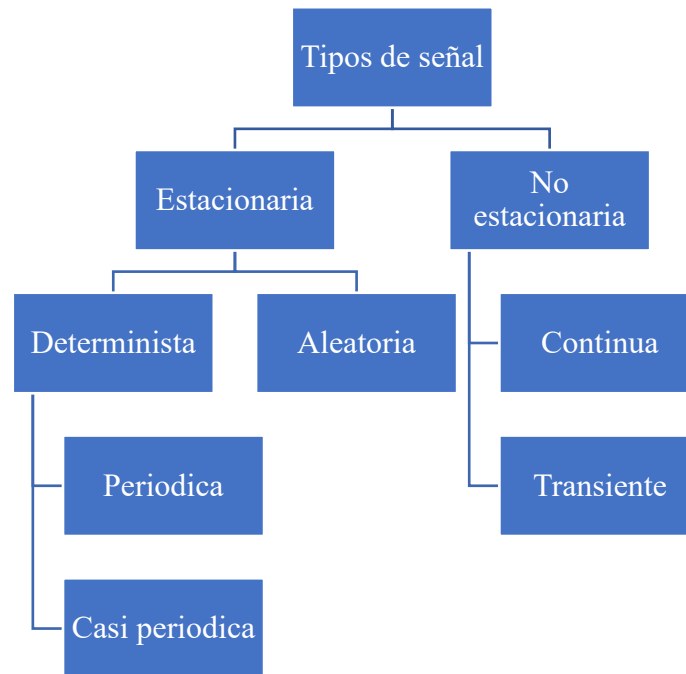
- Vibración no lineal, cualquiera de los componentes básicos del sistema bajo análisis se comporta de manera no lineal.
- Vibración amortiguada, se pierde la energía por fricción o por otra resistencia durante la oscilación (Rao, 2018).

El comportamiento con respecto al tiempo de las vibraciones deterministas y las vibraciones aleatorias se muestran en la Figura 2.4.



**Figura 2.4. Vibración determinista y aleatoria** (Martínez Batista et al., 2017)

En las vibraciones mecánicas es común llevar a cabo un análisis de frecuencias, también llamado análisis de espectro de la señal de vibración. La gráfica en el dominio del tiempo se llama la forma de onda y el que está en el dominio de la frecuencia, espectro. El análisis espectral consiste en convertir la información de la señal del dominio de temporal al dominio de frecuencia (White, 2010). Para llevar a cabo un análisis de espectro es necesario mencionar los diferentes tipos de señales, las cuales se pueden observar en la Figura 2.5.



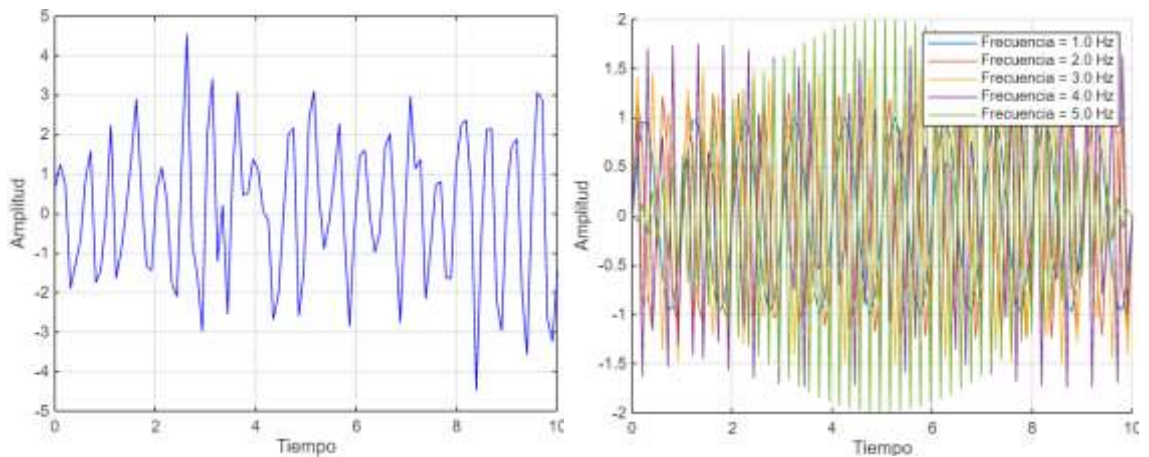
**Figura 2.5. Señales,** (White, 2010)

Los factores que influyen en el análisis de espectros para vibraciones mecánicas se encuentran el periodo de la onda ( $T$ ), la frecuencia de la onda ( $F$ ) y la amplitud ( $A$ ) (Harris & Piersol, 2002a).

- Para un ciclo  $T$  es el tiempo necesario. Dependiendo de que rápido se cambie la onda el periodo se mide en segundos o milisegundos.
- Uno sobre  $T$  es la frecuencia de la onda, es decir, es el número de ciclos que ocurren en un segundo, así, este es el recíproco del período.
- La distancia máxima de la onda es la amplitud del punto cero o bien del punto de equilibrio.

Las vibraciones aleatorias se distinguen por no poder predecirse ni en su contenido frecuencial ni en su magnitud, a pesar de ello mantienen propiedades estadísticas relativamente constantes a lo largo del tiempo. Algunos ejemplos de este tipo de señales incluyen la lluvia golpeando un techo, el ruido generado por un motor a reacción y la turbulencia en los patrones de flujo dentro de una bomba (White, 2010).

La característica más notable de las vibraciones aleatorias es que no siguen un patrón periódico. Si bien comprender la historia previa del movimiento aleatorio permite predecir la probabilidad de que ocurran diferentes magnitudes en un momento específico (Steinberg, 2000). En la Figura 2.6a. se muestra un gráfico típico de una vibración aleatoria, este gráfico se puede descomponer en una serie de curvas sinusoidales superpuestas donde cada curva oscila con su propia frecuencia y amplitud como se muestra en la Figura 2.6b.



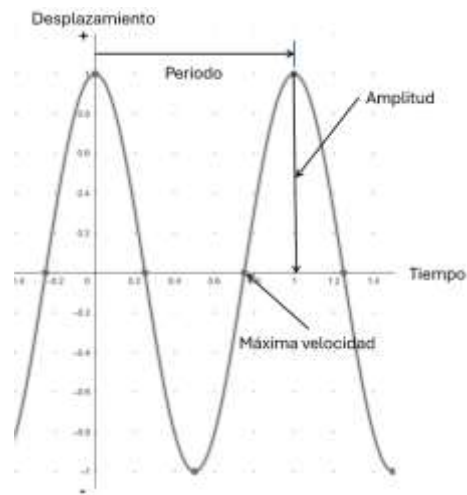
**Figura 2.6. a) Gráfica típica de vibración aleatoria, b) Serie de curvas sinusoidales**

## 2.2. Modelos Físicos para Vibración

En la sección de modelos físicos para vibración se presentan el movimiento armónico simple, péndulo, curva S-N, modelo de Basquin y la ley de potencia inversa.

### 2.2.1. Movimiento Armónico Simple

El movimiento armónico simple es la forma más básica de movimiento periódico. Se representa continuamente mediante una onda sinusoidal continua en un gráfico que muestra el desplazamiento en función del tiempo como se ilustra en la Figura 2.7. El recíproco del periodo se llama simplemente frecuencia. Además, se conoce como frecuencia de vibración, medida en ciclos por segundo o hercios (Hz) y el desplazamiento máximo se denomina amplitud de la vibración (Steinberg, 2000). La formulación para un elemento que experimenta un movimiento armónico simple que sigue un patrón de desplazamiento está definido por la siguiente ecuación.



**Figura 2.7. Movimiento armónico simple**

La posición en función del tiempo para un movimiento armónico simple se puede representar en la ecuación 2.1.

$$x = A \text{ Sen}(\omega_n t + \phi) \quad (2.1)$$

Para la ecuación 2.1, enseguida se da la razón de la ecuación donde se tiene una velocidad constante.

$$F = -k \cdot x \quad (2.2)$$

$$F = m \cdot a \quad (2.3)$$

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \cdot a = -k \cdot x$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

Dividiendo ambos términos por  $m$  queda la siguiente ecuación.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (2.4)$$

De la ecuación obtenida se suman ambos términos por  $k/m$  para obtener la ecuación diferencial del movimiento armónico simple.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.5)$$

La ecuación característica de la ecuación lineal homogénea de dos grados obtenida en la ecuación anterior es;

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2.6)$$

$$t^2 + at + b = 0$$

$$t_1 = \alpha + \beta i$$

$$t_2 = \alpha + \beta i$$

$$y = Ae^{\alpha t} \cdot \text{Sen}(\beta t) + Be^{\alpha t} \cdot \text{Cos}(\beta t)$$

$$t^2 + 0t + \frac{k}{m} = 0$$

$$t^2 = -\frac{k}{m}$$

$$t = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} i$$

$$x(t) = A \text{Sen}\left(\frac{k}{m}t\right) + B \text{Cos}\left(\frac{k}{m}t\right) \quad (2.7)$$

De las demostraciones finalmente se tiene la solución general que corresponde a la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple es.

$$x(t) = A \text{Sen}(\omega_n t) + B \text{Cos}(\omega_n t) \quad (2.8)$$

Donde  $A$  es la amplitud,  $\omega_n$  corresponde a la frecuencia angular y  $t$  es el tiempo, para las condiciones iniciales de  $(x$  y  $\dot{x})$ .

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.9)$$

La velocidad y aceleración del elemento se obtienen derivando dos veces el desplazamiento de la ecuación 2.1.

$$\dot{x} = \omega_n A \text{Cos} (\omega_n t + \phi) \quad (2.10)$$

$$\ddot{x} = -\omega_n^2 A \text{Sen} (\omega_n t + \phi) \quad (2.11)$$

Se obtiene una ecuación alterna auxiliándose de un ángulo de fase, la cual se muestra en la Figura 2.7.

$$x = C \text{Sen} (\omega_n t + \phi) \quad (2.12)$$

Donde,

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.13)$$

Y

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{A}{B} \right) \quad (2.14)$$

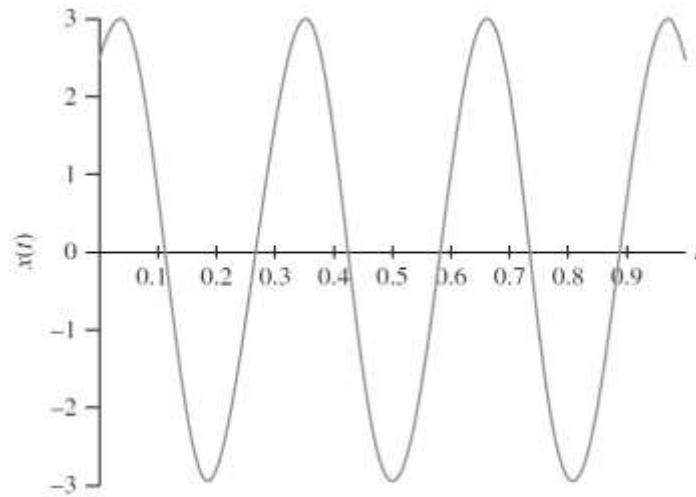
En la Figura 2.8, la amplitud, X, es el desplazamiento máximo desde el equilibrio. La respuesta es cíclica. El periodo es el tiempo necesario para ejecutar un ciclo, está determinado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.15)$$

Se mide en segundos (s). el recíproco del periodo es el número de ciclos ejecutados en un segundo y se denomina frecuencia

$$\text{amplitud} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.16)$$

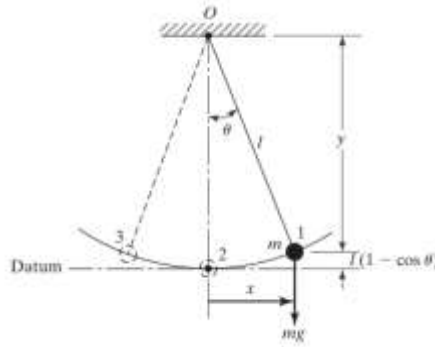
La unidad de ciclos/segundos se designa como un hercio (Hz). A medida que el sistema ejecuta un ciclo, el argumento de la función trigonométrica recorre 2 radianes (Kelly, 2012).



**Figura 2.8. Representación sinusoidal**

### 2.2.2. Péndulo

Un péndulo es un sistema dinámico fundamental para comprender el movimiento oscilatorio, se considera la vibración del péndulo simple mostrado en la Figura 2.9, donde el péndulo de masa ( $m$ ) se mueve tras recibir un desplazamiento angular ( $\theta$ ). La energía cinética del péndulo es cero porque su velocidad es cero en la posición 1. No obstante, tiene una energía potencial de  $mgl(1 - \cos \theta)$  en relación con la posición 2 del punto de referencia. Dado que la fuerza gravitacional genera un par de fuerzas de  $mgl \sin \theta$  en el punto  $O$ , el péndulo empieza a moverse hacia la izquierda desde la posición 1, lo que le otorga una cierta aceleración angular en sentido horario. Cuando llega a la posición 2, toda su energía potencial se ha transformado en energía cinética. Por lo tanto, el péndulo no se detendrá en la posición 2, sino que seguirá oscilando hasta la posición 3 (Kelly, 2012).

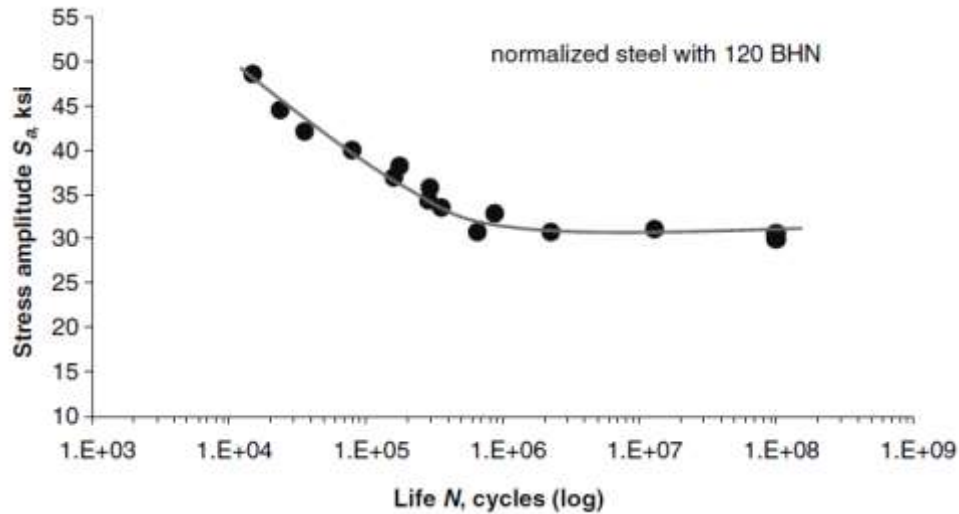


**Figura 2.9. Péndulo simple**

El movimiento de la Figura 2.9 es un péndulo simple el cual se puede representar en términos del ángulo  $\theta$  o en términos de las coordenadas cartesianas  $x$  y  $y$ . Al usar estas coordenadas se sabe que estas no son independientes ya que están relacionadas entre sí mediante la relación  $x^2 + y^2 = l^2$ , donde  $l$  es la longitud constante del péndulo (Kelly, 2012; Rao, 2018).

### 2.2.3. Curva S-N

En la Figura 2.10 se muestran los datos de fatiga por flexión del acero representados en un gráfico semilogarítmico. En esta representación, la única línea que muestra estos datos se conoce como la curva S-N o curva de Wöhler. Cuando se representa en escalas logarítmicas, esta curva se vuelve línea. Se divide en dos regiones; una región con pendiente negativa, denominada región de vida finita y una línea horizontal que representa la región de vida infinita. El punto en que la curva cambia de pendiente negativa a una línea horizontal se llama “rodilla” de la curva S-N, que indica el límite de fatiga o de resistencia. El cual está relacionado con el fenómeno en el cual la formación de grietas se detiene debido a la presencia de un límite de grano a una barrera microestructural dominante.



**Figura 2.10. Gráfico de fatiga de flexión**

Cuando se generan gráficos logarítmicos de estrés aplicado contra la vida útil de fatiga a partir de pruebas a fatiga S-N, la coordenada  $y$  se expresa en términos de amplitud de estrés o rango de estrés y la coordenada  $x$  se expresa en términos de el numero de ciclos hasta la falla. La vida útil de fatiga (ciclos) se refiere a la vida requerida para nucleación y crecimiento de una pequeña grieta hasta una longitud de grieta visible (Lee et al., 2013). La ecuación 2.17 representa la típica curva S-N:

$$S_a = S'_f (2N_f)^b \quad (2.17)$$

Donde  $b$  es el exponente de resistencia a la fatiga, y  $S'_f$  es el coeficiente de resistencia a la fatiga. La ecuación 2.17 es la más ampliamente utilizada, conocida como la relación de Basquin, en el enfoque basado en el estrés para el análisis y diseño de fatiga.

#### 2.2.4. Modelo de Basquin

El modelo de Basquin, está dado por la ecuación 2.18.

$$\log N = A - B \log \Delta\sigma; \quad \Delta\sigma \geq \Delta\sigma_0; \quad B \geq 0 \quad (2.18)$$

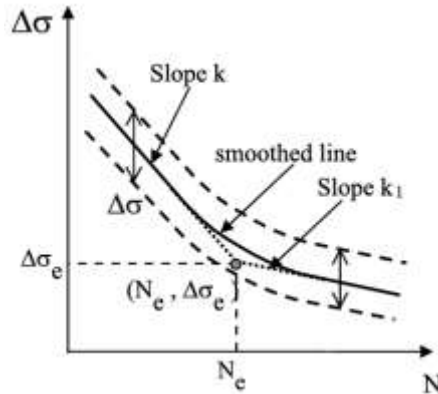
Es un modelo de regresión lineal en  $\log N$  y  $\log \Delta\sigma$ , esta limitado al límite de dureza  $\Delta\sigma_0$ . El modelo de Whöler recomienda que este modelo se exprese en la forma.

$$\log(N/N_0) = A - B \log \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0}, \quad \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} \geq 1; \quad B \geq 0 \quad (2.19)$$

$A$  y  $B$  son ahora parámetros adimensionales. Dado que se trata de un modelo de regresión lineal, sus parámetros  $A$  y  $B$  también pueden estimarse por métodos estándar de mínimos cuadrados, incluidos los intervalos de confianza si se asume la distribución normal para los tiempos de vida dados los rangos de tensión. En este caso los percentiles son (Castillo & Fernández-Canteli, 2009).

$$\log(N/N_0) = A - B \log \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} + \sigma \Phi^{-1}(p); \quad \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} \geq 1; \quad B \geq 0 \quad (2.20)$$

En la Figura 2.11 se muestra que los percentiles son también lineales rectas en un gráfico log-log.



**Figura 2.11. Modelo no lineal simple**

### 2.2.5. Ley de Potencia Inversa

El modelo de ley de potencia inversa (Inverse Power Law) se usa frecuentemente para los estreses acelerados y está dada por, (Bruel & Kjaer Inc, 2025).

$$L(V) = \frac{1}{KV^n} \quad (2.21)$$

Donde:

$L$  representa una medida cuantificable de la vida, ejemplo, la vida media, la vida característica, la vida mediana y la vida.

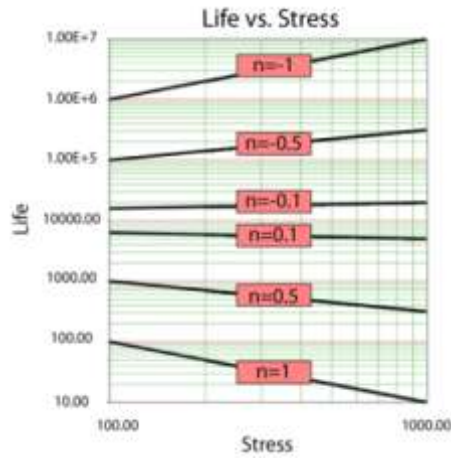
$V$  representa el nivel de estrés.

$K$  es uno de los parámetros del modelo a ser determinado ( $K > 0$ ).

$n$  es otro de los parámetros del modelo a ser determinado.

El parámetro  $n$ , en este modelo es una medida del efecto del estrés sobre la vida. A medida que aumenta el valor absoluto de  $n$  mayor es el efecto del estrés. Valores negativos de  $n$  indican un aumento de la vida útil con el aumento del estrés. Un valor absoluto cercano a

cero indica una vida constante con tensión cuando  $n = 0$ , ejemplo de estos valores se pueden ver en la Figura 2.12.



**Figura 2.12. Efecto de diferentes valores de  $n$ .** (*Inverse Power Law Relationship*, n.d.)

Este modelo es útil debido a que puede ser utilizado para modelar sistemas que se deterioran con el tiempo, es decir, los tiempos entre fallas se vuelven más cortos. También puede ser usado en sistemas que mejoran con el tiempo, es decir, los tiempos entre fallas se vuelven más largos (Rinne, 2009).

Así el proceso de ley de potencia inversa es un proceso Poisson no homogéneo con una forma particular en la función de intensidad dada por;

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (2.22)$$

por lo tanto

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} ; t \geq 0; \beta, \eta > 0 \quad (2.23)$$

basados en lo anterior, el número de eventos está definido por

$$P(X(t) = n) = \frac{(t/\eta)^{\beta n}}{n!} e^{-(t/\eta)^\beta} \quad (2.24)$$

Donde el numero esperado de eventos al tiempo  $t$  esta denotado por  $\Lambda(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$ .

Partiendo de la función de densidad del proceso Poisson no homogéneo

$$f_{Wn}(t) = \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \quad (2.25)$$

Sustituyendo la función  $\Lambda(t)$  se tiene (Rinne, 2009)

$$f_{Wn}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta n - \beta} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.26)$$

$$f_{Wn}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta n - \beta + \beta - 1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.27)$$

$$f_{Wn}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta n - 1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.28)$$

### 2.3. Herramientas de Confiabilidad en Vibración.

En esta sección se presentan las funciones de confiabilidad usadas para la determinación de la de la misma en el análisis de vibración.

### 2.3.1. Funciones de Confiabilidad

Las funciones de confiabilidad se utilizan en la ingeniería de confiabilidad para determinar la probabilidad de que un componente o sistema cumpla adecuadamente la función para la que fue diseñado, a lo largo de un periodo de tiempo determinado y bajo condiciones de operación definidas (Gutiérrez Pulido & De la Vara Salazar, 2013, Mendenhall & Sincich, 2016).

#### 2.3.1.1. Función de Densidad de Probabilidad (*pdf*)

La función de densidad de probabilidad, esta función es positiva [ $f(t) > 0$ ] y el área bajo su curva es 100%

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \quad (2.29)$$

#### 2.3.1.2. Función de Distribución Acumulada (*cdf*)

La función de distribución acumulada, esta función representa la probabilidad de falla acumulada hasta el tiempo  $t$ , y esta dada por el área bajo la curva de  $f(t)$  en el intervalo  $[0 - t)$ .

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (2.30)$$

#### 2.3.1.3. Función de Confiabilidad $R(t)$

La función de confiabilidad  $R(t)$  representa la probabilidad de sobrevivencia después del tiempo  $t$ , y está dada por el área bajo la curva de  $f(t)$  en el intervalo  $[t + \infty)$ .

$$R(t) = \int_0^{\infty} f(t) dt \quad (2.31)$$

#### 2.3.1.4. Función de Riesgo instantáneo $\lambda(t)$

La función de riesgo instantáneo determina el riesgo instantáneo del producto o proceso al tiempo  $t$ . Es una función condicional derivada del hecho de que toda distribución de probabilidad está dada como  $f(t) = \lambda(t) * R(t)$ . Así, la fórmula de la función de riesgo instantáneo es.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.32)$$

De la ecuación 2.32, observe que  $\lambda(t) = f(t)$  solo cuando  $R(t) = 1$ , lo cual ocurre solo para  $t = 0$ . Es decir, para toda  $t > 0$ ,  $\lambda(t) \neq f(t)$  y su valor está condicionado al valor de  $R(t)$ . Finalmente observe que dado que  $\lambda(t)$  no es una función de probabilidad, entonces  $\lambda(t)$  puede tener valores mayores a uno.

#### 2.3.1.5. Función de Riesgo Acumulado $H(t)$

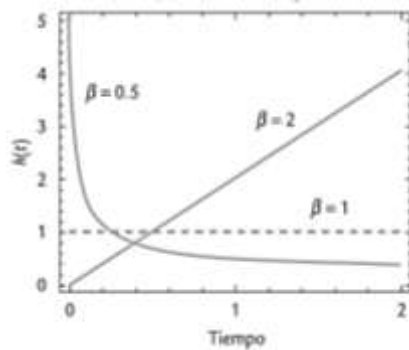
La función de riesgo acumulado  $H(t)$  representa el daño acumulado de falla de un producto desde cero hasta el tiempo  $t$ , y está dada por

$$H(t) = \int_0^{\infty} \lambda(t) dt \quad (2.33)$$

### 2.3.2. Distribución Weibull

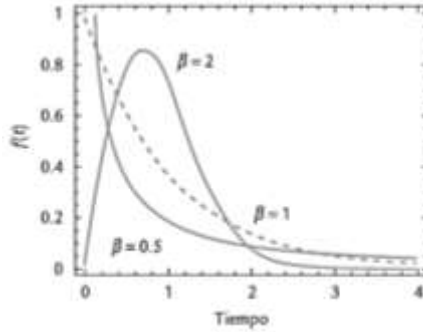
Debido a la flexibilidad que tiene esta distribución Weibull es la comúnmente usada para especificar la vida de los productos, dado que permite modelar productos con tasas de riesgo creciente, constante y decreciente como se puede observar en la Figura 2.13 dada. La función de densidad Weibull está definida por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right\}} \quad (2.34)$$



**Figura 2.13. Función de riesgo**

con  $t > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\eta > 0$ . Como se observa en la Figura 10, esta distribución es definida por dos de sus parámetros: el cual el primero es el de forma ( $\beta$ ) y el segundo parámetro es el de escala  $\eta$ . Como sus nombres lo expresan, el primero, parámetro, tiene el efecto sobre la forma que toma la distribución como se observa en la Figura 2.14 y el segundo afecta la escala del tiempo de vida.



**Figura 2.14. Funciones de riesgo**

En la figura 2.14 se pueden contemplar tres posibles comportamientos de la distribución Weibull, según el valor del parámetro de forma,  $\beta$ , manteniendo constante el parámetro de escala en el valor  $\eta = 1$ . En términos generales, cuando  $0 < \beta < 1$ , la función de riesgo disminuye con el tiempo, mientras que para valores de  $\beta > 1$  dicha función aumenta. Asimismo, al analizar la función de densidad se observa que si  $\beta = 1$ , la distribución Weibull se convierte en una distribución exponencial (caracterizada por una tasa de riesgo constante).

La distribución acumulada está dada por:

$$F(t) = 1 - e^{\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right\}} \quad (2.35)$$

mientras que las funciones de confiabilidad y riesgo son,

$$R(t) = e^{\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right\}} \quad y \quad h(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (2.36)$$

La distribución Weibull es ideal para describir los tiempos de falla en sistemas formados por varios componentes con comportamientos de vida similares, por lo cual el

sistema falla cuando alguno de sus componentes falla. Dicho de otra manera, el tiempo de falla del sistema corresponde al menor tiempo de falla entre todos sus componentes, siguiendo el eslabón del más débil. La formulación para el estrés resistencia con  $\beta_s = \beta_S$  se presenta a continuación;

$$R = P(Y > X)$$

$$R(t) = \frac{1}{1 + \frac{\eta_x^\beta}{\eta_y^\beta}} = \frac{1}{\frac{\eta_y^\beta + \eta_x^\beta}{\eta_y^\beta}} \quad (2.37)$$

Y así la formulación para el estrés resistencia con  $\beta_s \neq \beta_S$  se presenta a continuación;

$$R(t1) = P(Y1 > X1)$$

$$R(t1) = 1 - \int_0^\infty e^{-\left[ W_{1+\left( \frac{\eta_y W^{\frac{1}{\beta_y}}}{\eta_x} \right)} \right]} dW \quad (2.38)$$

### 2.3.3 Proceso Poisson no Homogéneo

Un proceso Poisson no homogéneo ocurre cuando el parámetro del proceso, que representa la intensidad por unidad de tiempo con la que ocurren los eventos ( $\lambda$ ) no es una constante sino una función de tiempo. Por lo que, un proceso Poisson no homogéneo a tiempo continuo  $\{X_t: t \geq 0\}$ , cuyo espacio de estados esta dado por  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , con un parámetro representado por la función ( $\lambda_t$ ), la cual es positiva y localmente integrable y que satisface las siguientes propiedades (Rincon, Rinner, 2009).

- a)  $x_0 = 0$ , para cualquier función evaluada en cero es cero.

- b) *Los incrementos son independientes*, es decir, los cambios en los valores del proceso en intervalos de tiempo que no se traslapan son independientes entre sí.
- c) *Depende del tiempo*.

Donde  $\Lambda(t)$  representada por  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t)$  para ser considerada en el proceso Poisson no homogéneo debe de cumplir con las siguientes características:

- Ser una función continua estrictamente creciente
- Estar definida para t no negativa
- $\Lambda(0) = 0$  y  $\Lambda(\infty) = \infty$

#### **2.3.4. Plan de Prueba de Vibración**

Los planes de prueba de vibración son pruebas aceleradas donde la duración de la prueba se realiza en menos tiempo incrementando el nivel de la prueba de tal manera que se mantenga los mismos daños inducidos por el entorno del equipo. La norma GMW3172 en sus apéndices C, I y O presenta el análisis de vibración dependiendo de la ubicación del producto dentro de un automóvil. El análisis por apéndice es como sigue.

##### **2.3.4.1. Plan a Cero Fallas (Apéndice C)**

El apéndice C, es la estadística de rachas exitosas, en el cual se determina el número de muestras que deberán ser sometidas a prueba para demostrar el requisito de confiabilidad. La ecuación del tamaño de la muestra es;

$$N = \left( \frac{\ln(1-C)}{\ln(R)} \right) \quad (2.39)$$

donde,

$R$  = confiabilidad requerida para ser demostrada en la prueba

$C$  = nivel de Confianza.

$N$  = tamaño de la muestra.

$N_{reducido}$  = nuevo tamaño de muestra reducido

Para vibración la norma GMW 3172 indica utilizar un índice de confiabilidad de  $R(t) = 0.97$ , con un intervalo de confianza de  $Cl = 0.50$ . Con esta información el tamaño de la muestra es  $n = 23$  piezas. De esa forma se deberán de correr 23 piezas por un tiempo de 8 horas en cada eje, a un nivel de GRMS dado por el perfil de prueba, y si ninguna pieza falla, se concluye con un  $Cl = 0.50$  que la confiabilidad mínima es de  $R(t) = 0.97$ . En el caso de no contar con las 23 piezas para la prueba, se aplica el apéndice I.

#### **2.3.4.2. Plan Para Muestras Insuficientes (Apéndice I)**

El apéndice I se utiliza cuando el número de muestras disponible para la prueba no es suficiente. Así, por ejemplo, cuando las piezas disponibles son menores que las requeridas, el objetivo consiste en aumentar el tiempo de experimentación para compensar por el uso de menos piezas en la prueba. El balance entre ambos escenarios se realiza a través de la igualdad llamada Lipson Equality, la cual establece que  $n_1 t_1^\beta = n_2 t_2^\beta$ . Donde  $\beta$  es el parámetro de forma de la distribución Weibull, y para estos datos  $n_1 = 23$  piezas,  $t_1 = 8$  horas,  $n_2$  es la cantidad de piezas que, si tenemos disponibles,  $n_2 = 12$  y  $t_2$  es el valor del tiempo incrementado al que deberemos de experimentar en cada eje para compensar por la disminución de piezas de 23 a 12. Para ello se usa el factor de sobre estrés dado por,

$$Factor\ de\ estr\ es = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/\beta} \quad (2.40)$$

numéricamente este factor con  $\beta = 2.5$  es;

$$Factor\ de\ estr\ es = \left(\frac{23}{12}\right)^{1/2.5} = 1.291725$$

así, bajo la restricción de número de piezas el tiempo de prueba es:

$$Test\ hrs_{redu} = 8\ horas * 1.291725 = 10.33\ horas$$

Por lo que el plan de prueba de acuerdo con el apéndice I queda como: Correr 12 piezas por 10.33 horas en cada eje a un nivel de Grms dado por el perfil de prueba, y sin ninguna pieza falla, se concluye con un  $CI = 0.50$  que la confiabilidad mínima es de  $R(t) = 0.97$ . Si este nuevo plan no es factible, el mismo apéndice I, proporciona las pautas para aumentar el nivel de Grms para disminuir de nuevo el tiempo de prueba de 10.33 horas a las 8 horas iniciales del apéndice C. Ahora el incremento en el valor del Grms acelerado, se logra a través del uso del factor de aceleración del modelo de potencia inversa dado por.

$$F.A = \left(\frac{Grms_{acel}}{Grms_{norm}}\right)^m = \left(\frac{Test\ Time_{norm}}{Test\ Time_{acel}}\right) \quad (2.41)$$

Donde  $m$  es el coeficiente de fatiga del material del aluminio. Para la aplicación donde  $m = 6.4$  y  $Grms = 2.84$ . Aquí, es importante mencionar que, para vibración altamente acelerada por fatiga, se recomienda utilizar un factor de seguridad de 3 veces la tensión original. Numéricamente, el Grms acelerado es

$$Grms_{acel} = Grms_{norm} * \left[ \sqrt[m]{\frac{Test\ Time\ Normal}{Test\ Time\ Accele}} \right] \quad (2.42)$$

$$Grms_{acel} = 2.84Grms * \left[ \sqrt[6.4]{\frac{10.33}{8}} \right] = 2.96$$

Así, se deben correr 12 piezas por 8 horas con una energía de 2.96 *Grms* y si ninguna falla se concluye con un  $Cl = 0.50$  que la confiabilidad mínima es de  $R(t) = 0.97$ . La modificación de la energía del perfil inicial para que refleje el *Grms* acelerado se realiza a través del uso del factor de ajuste dado por.

$$Factor\ de\ ajuste = \left( \frac{Grms\ acele}{Grms\ normal} \right)^2 \quad (2.43)$$

Este factor de ajuste se multiplica por cada uno de los niveles de energía del perfil original y así calcular el nuevo *Grms*. La mayoría de los agitadores electrodinámicos pueden producir un desplazamiento máximo de pico a pico de una pulgada, este es el factor límite para aumentar el valor de *Grms*. El desplazamiento de pico a pico del agitador electrodinámico se calcula con la siguiente ecuación:

$$D = 42.8 * \sqrt{\frac{G^2}{Hz} / f_{lowest}^3} \quad (2.44)$$

Donde  $f_{lowest}$  es el límite inferior del rango de frecuencia aplicada del perfil de prueba.

### 2.3.4.3. Plan Para Daño Acumulado Por la Regla de Miner (Apéndice O).

El apéndice O, es diseño de un soporte con una vida útil adecuada a la fatiga. Los requisitos de prueba de vibración definidos en este apéndice se basan en la especificación ISO 16750-3 en el cual el porcentaje de daño acumulado por la regla de Miner, el PSD se debe aplicar al componente de prueba en cada eje, durante el tiempo que el vehículo se probaría en la carretera de Belgian Block. El "tiempo en la carretera de Belgian Block" que menciona la norma se muestra a continuación:

**Tabla 2.1. Tiempo en la carretera de Belgian Block**

4WD Full Size Truck (PU or Utility)	600 hours of vibration
2WD Full Size Truck (PU or Utility)	600 hours of vibration
4WD Mid Size PU & Rec. Off Road	150 hours of vibration
2WD Mid Size PU & Rec. Off Road	150 hours of vibration
4WD Mid Size Utility	150 hours of vibration
2WD Mid Size Utility	150 hours of vibration
Passenger Vehicle	84 hours of vibration

Ningún ingeniero quiere correr una prueba de vibración por tantas horas en cada uno de los tres ejes, por lo que la prueba es acelerada incrementando el valor de los Grms mientras se disminuye la duración de la prueba.

### 2.4. Revisión de Literatura.

En esta sección se presentan los modelos que actualmente se usan para el análisis de daño acumulado y la determinación de la confiabilidad en los elementos mecánicos.

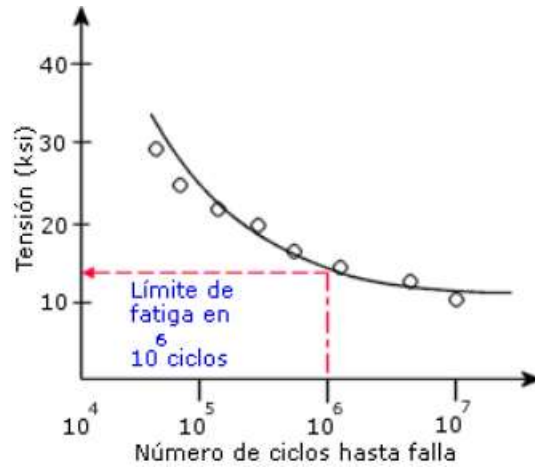
### **2.4.1. Modelos Para Acumular el Daño**

La predicción de los daños causados por fatiga en elementos mecánicos sometidos a cargas variables es un tema complejo. El modelo de daño más simple y ampliamente utilizado es el modelo de daño lineal, también conocido como la regla de Miner (1945). Sin embargo, en muchos casos la regla lineal puede llevar a predicciones de vida útil no conservadoras. Los resultados de este modelo no tienen en cuenta el efecto de la secuencia de carga en la acumulación de daño esto debido a la carga de fatiga cíclica. A lo largo del tiempo, se han propuesto diversos modelos de daño por fatiga para mejorar la precisión en la predicción de la vida útil. De esta manera se presenta la regla de Miner y el modelo no lineal.

#### **2.4.1.1. Regla de Miner**

Miner (Miner, 1945) tomando de referencia el trabajo de Langer aplico la regla de daño lineal a los datos de fatiga tensión-tensión axial del material del revestimiento de aeronaves ver Figura 2.15, demostrando una buena concordancia entre las predicciones de la regla del daño lineal y sus resultados experimentales (Lee et al., 2005). Desafortunadamente el daño generado por vibración es muy diferente a de tensión-tensión por lo que no deberemos de usar la regla de Miner en los análisis de vibración.

El principio del daño acumulado usando la Regla de Miner, se basa en el supuesto de que la resistencia a la fatiga se determina aplicando diferentes niveles de tensión cíclica contribuyendo a una cierta cantidad de daño a un componente.



**Figura 2.15. Curva S-N**

De esta forma, la regla de Miner se utiliza para predecir la vida total de un componente sujeto a una secuencia de niveles de carga y está dada por la ecuación;

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \tag{2.45}$$

donde  $n_i$  es el número de ciclos de un nivel de tensión específico,  $N_i$  es el número de ciclos hasta la falla para este nivel de tensión y  $D_i$  es el daño que el material ha sufrido durante la aplicación de la carga. Así  $D_i \leq 1$ , significa que el componente o pieza no falla.

Además, la teoría de daño acumulado lineal, cuando se experimentan varios niveles de estrés durante diferentes ciclos se puede representar como, se puede ver una representación gráfica en la Figura 2.16;

$$D_c = \sum_{i=1}^{i=k} (n_i/N_i) \tag{2.46}$$



### 2.4.1.2. Modelo No Lineal

Debido a las deficiencias existentes en la regla de acumulación de daño lineal y a que el comportamiento de la vibración aleatoria es no lineal, se ha desarrollado una amplia gama de modelos de acumulación de daño no lineal. De los cuales, Richart y Newmark (Hectors & De Waele, 2021) presentaron un modelo de curva de daño. Luego, basándose en ello, Marco y Starkey (Xu et al., 2021) desarrollaron el primer modelo no lineal de acumulación de daños dependiente de la carga dado en la ecuación 2.47,

$$D = \sum \left( \frac{n_i}{N_i} \right)^{C_i} \quad (2.47)$$

Donde  $n_i$  representa el número de ciclos de carga aplicada en un nivel de tensión dado  $\sigma_i$ ,  $N_i$  es el número de ciclos hasta la falla en  $\sigma_i$ ,  $C_i$  es el efecto de la secuencia de carga y  $D$  es el daño total. Se han realizado muchos trabajos de investigación donde el modelo de la curva de daño propuesta por Manson y Halford explica muy bien los efectos de las secuencias de carga en condiciones de carga de dos niveles a través de la ecuación 2.48.

$$a = a_0 + (0.18 - a_0) \left( \frac{n_a}{N_f} \right)^{\left( \frac{2}{3} \right) N_f^{0.4}} \quad (2.48)$$

Donde  $n_a$  representa los ciclos aplicados para alcanzar una longitud de grieta  $a$ ,  $N_f$  representa el número de ciclos necesarios para alcanzar la fractura y  $a_0$  es la longitud característica del defecto del material cuando  $n_a/N_f = 0$ . Por tanto, el daño acumulativo  $D$  viene dado por el radio del ciclo y la longitud de la grieta.

$$D = \frac{1}{0.18} \left[ a_0 + (0.18 - a_0) \left( \frac{n_a}{N_f} \right)^{\left( \frac{2}{3} \right) N_f^{0.4}} \right] \quad (2.49)$$

Al aplicar la ecuación anterior en una conexión de dos niveles de carga de secuencia A y B, se obtiene,

$$\begin{aligned} D_A &= \frac{1}{0.18} \left[ a_0 + (0.18 - a_0) \left( \frac{n_1}{N_{f1}} \right)^{\left( \frac{2}{3} \right) N_{f1}^{0.4}} \right] D_B \\ &= \frac{1}{0.18} \left[ a_0 + (0.18 - a_0) \left( \frac{n_2}{N_{f2}} \right)^{\left( \frac{2}{3} \right) N_{f2}^{0.4}} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ahora, considerando un daño igual para los dos niveles de carga con base en la teoría de la elasticidad y las propiedades del material (Weibull, 1939), el ciclo del radio de daño equivalente es,

$$\frac{n_1}{N_{f2}} = \left( \frac{n_2}{N_{f2}} \right)^{\left( \frac{N_{f2}}{N_{f1}} \right)^{0.4}} \quad (2.51)$$

en consecuencia, la curva de daño viene dada por la ecuación de la ley de potencia.

$$D_i = \left( \frac{n_i}{N_{if}} \right)^{\left( \frac{N_{if}}{N_{if-1}} \right)^{0.4}} \quad (2.52)$$

Donde el exponente 0.4 representa una constante característica que representa la relación causa-efecto de la deformación del material con ciclos aplicados, y (exponente) representa la secuencia. Para considerar el efecto de las cargas del PSD al modelo anterior se le modifica el exponente para que quede este en función de dichas cargas, al sustituir el valor del exponente 0,4 por  $(\sigma_i \pm 1_{vb}/\sigma i_{vb})$ . Así el modelo desarrollado representa una función de

daño continuo no lineal que incorpora la tensión de flexión inducida por vibración (Barraza, 2022; Barraza-Contreras et al., 2022).

$$D = \sum_{i=1}^2 D_2 = \left[ \frac{n_2}{N_{2,f}} \right] \left( \frac{N_{2,f}}{N_{1,f}} \right)^{\left[ \frac{\sigma_{1vb}}{\sigma_{2vb}} \right]} \quad (2.53)$$

En la ecuación 2.54, el valor de ciclos totales hasta falla  $N_i$  se determina utilizando la ecuación de Basquin,

$$N_i * \sigma_i^b = a^b \quad (2.54)$$

#### 2.4.1.3. Modelo de Estrés Variante

El modelo del estrés variante permite determinar la confiabilidad de elementos mecánicos sujetos a niveles de estrés no constantes en el tiempo. La formulación del modelo se basa en combinar la teoría del daño acumulado y distribuciones de vida como la distribución Weibull. A continuación, se da la formulación del modelo de estrés variante que puede ser usada en el análisis de confiabilidad de vibración usando la distribución Weibull (ReliaSoft, 2003, 2016).

$$R(t, x(t)) = e^{-\left[ \int_0^t \frac{1}{\eta(u)} du \right]^b} \quad (2.55)$$

En la ecuación 2.56, el parámetro de escala eta  $\eta$  en función del estrés variante ( $x(t)$ ) puede ser estimado como

$$\eta(t) = \left[ \frac{a}{x(t)} \right]^n \quad (2.56)$$

Donde  $a$  y  $n$  son parámetros del modelo a ser estimados. Por lo tanto, el modelo de estrés variante del daño acumulado/Weibull es

$$f(t, x(t)) = \left\{ \beta \left[ \frac{x(t)}{a} \right]^n \left[ \int_0^t \left[ \frac{x(u)}{a} \right]^n du \right]^{\beta-1} \right\} e^{-\left[ \int_0^t \left[ \frac{x(u)}{a} \right]^n du \right]^\beta} \quad (2.57)$$

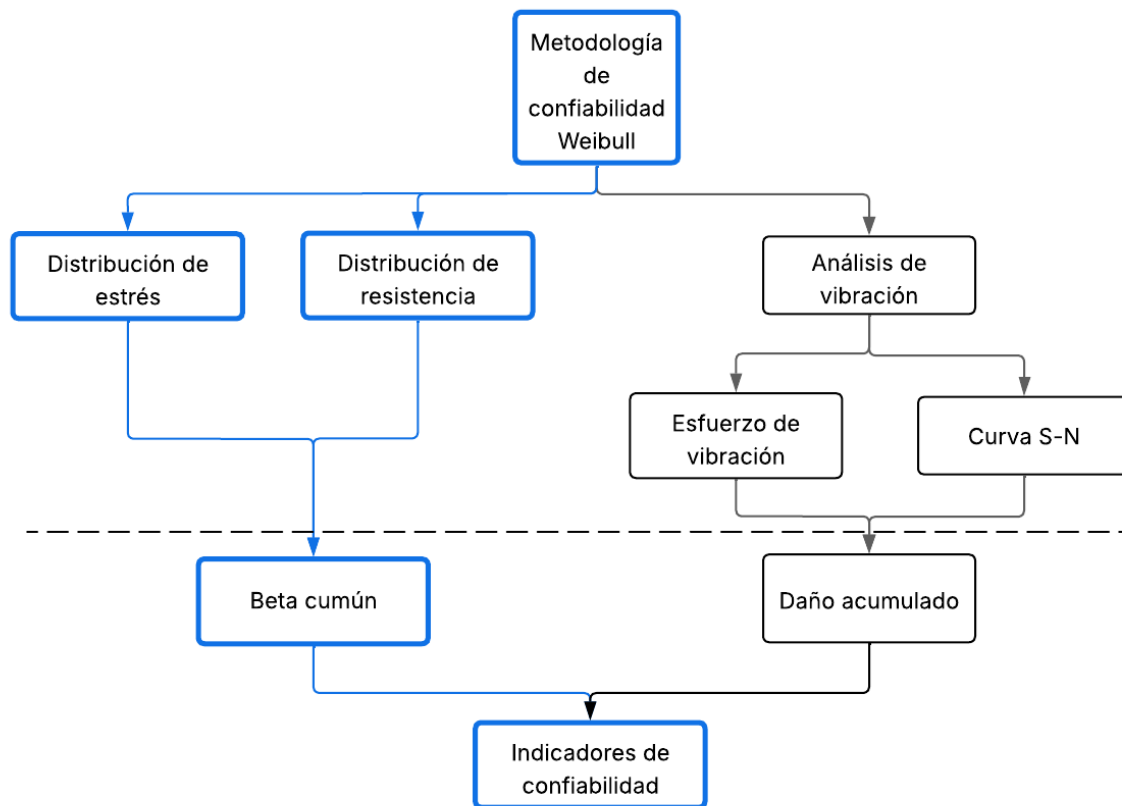
Así, los parámetros  $\beta$ ,  $a$  y  $n$  pueden ser estimados por el método de máxima verosimilitud.

#### **2.4.1.4. Modelo de Daño acumulado**

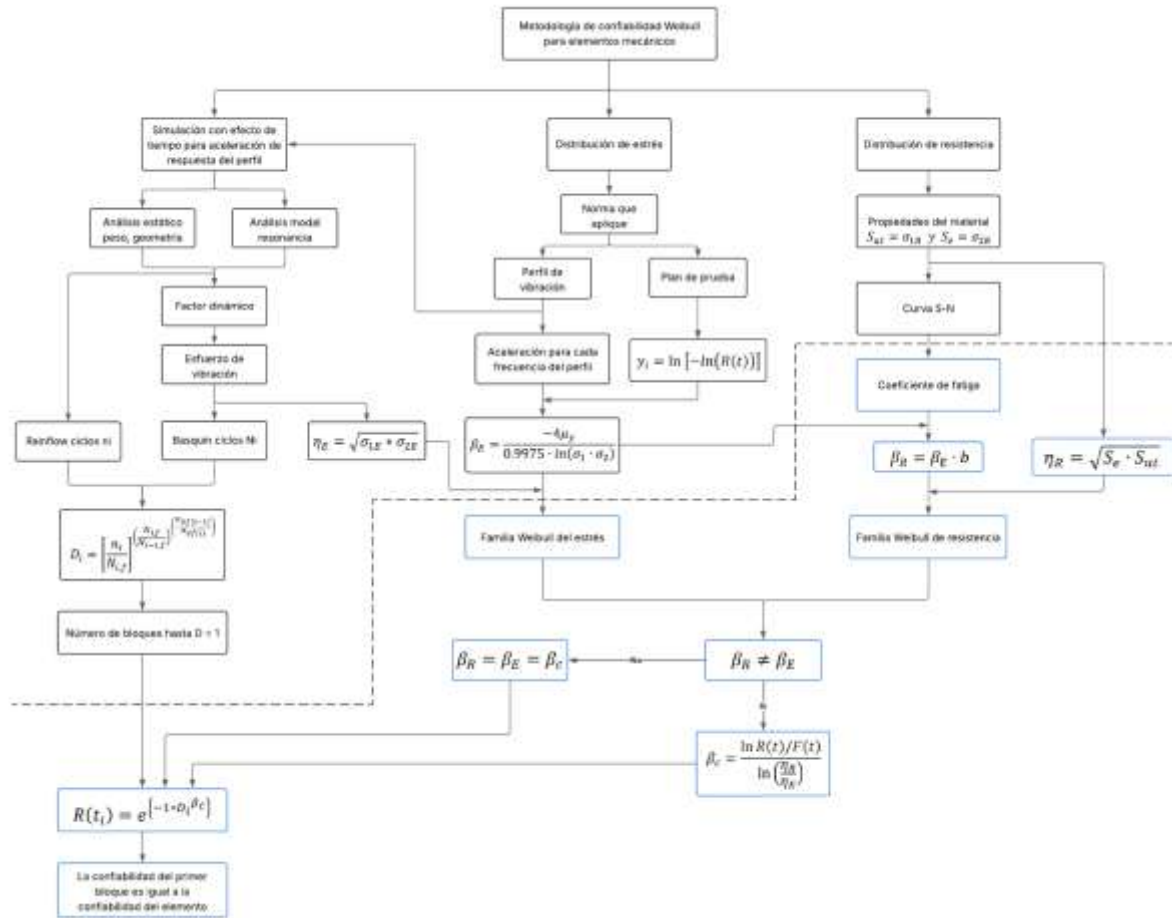
El modelo de daño acumulado puede definirse como la cantidad de daño  $D_i$ , a un nivel de tensión dado  $S_i$  (Lee et al., 2013). Y es ampliamente utilizado para determinar la confiabilidad de un elemento cuando está sometido a tensiones variables en el tiempo. Entre los modelos de daño más comunes, tenemos el método de tensión escalonada donde el elemento se somete a diferentes niveles de tensión (ReliaSoft, 2016). Como se muestra en la ecuación 1.3.

### 3. METODOLOGÍA

El capítulo está estructurado para presentar la metodología actual y la metodología desarrollada que se utiliza para determinar la confiabilidad de un elemento mecánico sujeto a vibración aleatoria. De los dos diagramas de la metodología desarrollada, el primero representa el esquema general de la metodología y el segundo diagrama presenta sus detalles.



**Figura 3.1. Diagrama general de la metodología desarrollada.**



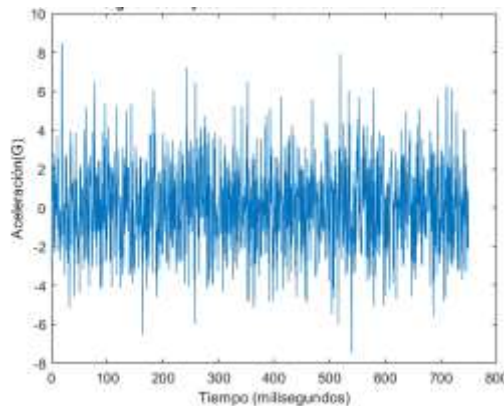
**Figura 3.2. Diagrama en extenso de la metodología desarrollada.**

Para comprensión del aporte, generalidad y alcance de la metodología desarrollada, en la sección 3.1, se presentan los nueve pasos generales de la metodología actual, aplicados para realizar el análisis de vibración de elementos mecánicos. En esta misma sección, se mencionan las deficiencias que esta metodología actual tiene para determinar la confiabilidad del elemento mecánico. Finalmente, en la sección 3.2, se presentan los pasos del diez al diecinueve que complementan la metodología actual, y que son los que permiten la estimación eficiente de la confiabilidad del elemento mecánico. El desarrollo detallado de los pasos de la metodología actual se da a continuación.

### 3.1. Metodología Actual

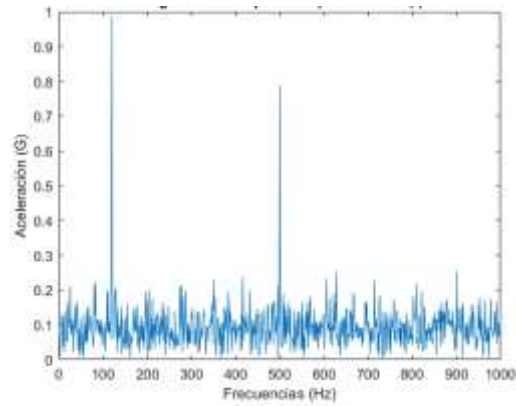
La metodología actual para determinar la confiabilidad de un elemento mecánico va desde la colección de datos de vibración en el dominio del tiempo, hasta la determinación del daño acumulado que la vibración aleatoria le genera al elemento mecánico (Barraza-Contreras et al., 2020b) (Kumar, 2008). En el análisis de esta metodología, el valor de referencia utilizado para determinar la confiabilidad del elemento es el índice del daño acumulado ( $D$ ). Este índice se considera a) crítico cuando  $D = 0.70$  e b) indicativo de la falla cuando  $D = 1$  (Hectors & De Waele, 2021). Debido a que como se mencionó en la sección 1.5, el modelo definido en la ecuación 1.4 es eficiente para acumular el daño, los pasos de la metodología actual basados en este modelo son:

**Paso 1.** Obtener datos de vibración en el dominio del tiempo. Para la recolección de los datos se siguen los siguientes pasos; seleccionar el tipo de acelerómetro, identificar los puntos críticos de la fixtura, seleccionar el método de montaje (tornillo), colocar el acelerómetro en la fixtura alineando el eje sensible con el eje del shaker (X, Y o Z) que se vaya a probar y asegurar los cables de los acelerómetros. Los datos recolectados de vibración en el dominio del tiempo son como se muestra en la Figura 3.3.



**Figura 3.3. Datos de vibración en el dominio del tiempo.**

**Paso 2.** Transformar los datos del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia para obtener el espectro de densidad de potencia (PSD). La transformación se realiza a través de la transformada de Fourier. El PSD correspondiente a la Figura 3.3 se presenta en la Figura 3.4.



**Figura 3.4. PSD de datos de vibración en el dominio de la frecuencia.**

**Paso 3.** Determinar el perfil de prueba. Este contiene las frecuencias y las amplitudes que son significantes en el PSD. El perfil de prueba correspondiente al PSD de la Figura 3.4, se presenta en la Tabla 3.1.

**Tabla 3.1. Perfil de prueba para PSD de la Figura 3.4.**

Frecuencia (HZ)	Gravedades (G)	Aceleración [ $G^2/Hz$ ]
120	10.954	1
500	18.708	0.7

**Paso 4.** Determinar el plan de prueba acelerado que corresponde al perfil. Para esta investigación se utiliza la norma GMW3172 por lo que la confiabilidad a demostrar es de 97%.

**Paso 5.** Determinar los esfuerzos de flexión generados por vibración. Para ello;

- Se incorpora el efecto del tiempo al perfil de prueba en la simulación. En esta investigación la simulación se realiza en Matlab usando la librería de Vibrationdata.

- Se realiza un análisis estático y modal para considerar la geometría, el peso y la resonancia.
- Se determina la frecuencia natural.
- Se determinan el factor dinámico usando la ecuación 4.3.
- Se determinan los esfuerzos de flexión correspondientes a cada renglón del perfil usando el factor dinámico.

**Paso 6.** Determinar el número de ciclos ( $N_i$ ) que resiste el elemento antes de la falla. En esta investigación estos se determinan usando los esfuerzos de flexión obtenidos en el paso 5, en la ecuación de Basquin.

**Paso 7.** Determinar los ciclos aplicados ( $n_i$ ). Estos se pueden determinar usando la herramienta Rainflow de la librería Vibrationdata del programa Matlab, (validada por la norma ASTM E 1049-85, 2017).

**Paso 8.** Determinar el daño acumulado generado por la vibración, usando el modelo definido en la ecuación 1.4.

**Paso 9.** Determinar el número de bloques en el que el daño considerado crítico ocurre. En la práctica el valor crítico considerado es  $D = 0.70$  o  $D = 1$ .

### **3.2. Metodología Desarrollada**

Esta metodología se desarrolla con el objetivo de utilizar la distribución Weibull y el daño acumulado generado por vibración para determinar los índices de confiabilidad del elemento mecánico bajo análisis. En la metodología desarrollada, de los pasos del 1 al 9 de la metodología actual, se mantienen sin cambio los pasos del 1 al 5 y los pasos 8 y 9, los pasos 6 y 7 solo cambian de orden. Es importante mencionar que estos pasos del 1 al 9 solo permiten acumular de manera eficiente el daño hasta que  $D = 1$ . Así, los pasos restantes del 10 al 19 de

esta metodología desarrollada se enfocan en combinar la distribución Weibull y el daño acumulado estimados en los pasos del 1 al 9, para determinar los índices de confiabilidad del elemento mecánico. De esa forma, debido a que la metodología desarrollada está basada en 1) el análisis de vibración dado en los pasos del 1 al 9 de la sección anterior, 2) en la distribución del estrés y 3) en la distribución de la resistencia, entonces el desarrollo de los pasos del 10 al 19 se realiza con este objetivo. En los pasos 10 y 11 se determinan los parámetros de la distribución Weibull que modela el estrés como sigue.

**Paso 10.** Determinar el valor del parámetro de forma (beta) de la distribución Weibull que modela al estrés. En base a los valores de GRMS máximo y mínimo del perfil de vibración, determine el valor de beta usando la ecuación 21 dada en (Piña-Monarrez, 2019) la cual es,

$$\beta_E = \frac{-4\mu_y}{0.9975 * \ln(\sigma_1/\sigma_2)} \quad (3.1)$$

**Paso 11.** Determinar el valor del parámetro de escala (eta) de la distribución Weibull que modela al estrés. En base a los valores de esfuerzos de flexión mínimo  $\sigma_{2E}$  y máximo  $\sigma_{1E}$  estimados en el paso 5, usando la ecuación 22 dada en (Piña-Monarrez, 2019), determine eta como,

$$\eta_E = \sqrt{\sigma_{1E} \cdot \sigma_{2E}} \quad (3.2)$$

Las ecuaciones 3.1 y 3.2 representan los parámetros de la familia Weibull que modela el estrés. De igual forma la determinación de los parámetros que representan a la familia de la resistencia, se realiza a través de los pasos 12 al 14.

**Paso 12.** Determinar el coeficiente de fatiga del material del elemento mecánico que se está analizando. Este coeficiente de fatiga se puede determinar de la ficha técnica del material o utilizando la ecuación 4.6.

**Paso 13.** Determinar el valor del parámetro de forma (beta) de la distribución Weibull que modela a la resistencia. Mediante el uso de la ecuación 3.3,

$$\beta_R = \beta_E \cdot b \quad (3.3)$$

donde,  $\beta_E$  es el valor beta de la distribución del estrés estimado en el paso 10, y b es el coeficiente de fatiga determinado en el paso 12.

**Paso 14.** Determinar el valor del parámetro de forma (beta) de la distribución Weibull que modela a la resistencia. En base a los dos valores extremos del material, último esfuerzo ( $S_{ut}$ ) y esfuerzo a la fatiga ( $S_e$ ), usando la ecuación 3.2, se determina el parámetro eta en términos de la resistencia como,

$$\eta_R = \sqrt{S_e \cdot S_{ut}} \quad (3.4)$$

Las ecuaciones 3.3 y 3.4 representan los parámetros de la familia Weibull que modela la resistencia. Así, para considerar el índice de confiabilidad mínima deseado, que en nuestro caso es del 97%, el efecto del estrés aplicado y la resistencia del material, en la determinación de los índices de confiabilidad, se determina el valor del parámetro de forma Weibull común a la distribución del estrés y a la distribución de la resistencia, como sigue.

**Paso 15.** Determinar el valor de beta que es común a la distribución del estrés y a la distribución de la resistencia. Esta se estima mediante la ecuación 149 dada en (Baro-Tijerina, 2020).

$$\beta_c = \frac{\ln R(t)/F(t)}{\ln\left(\frac{\eta_R}{\eta_E}\right)} \quad (3.5)$$

La ecuación 3.5 representa el parámetro de beta común entre la distribución del estrés y la distribución de resistencia. Usando esta beta común con los elementos de daño  $D_i$  los índices de confiabilidad se determinan como sigue.

**Paso 16.** Determine la confiabilidad de cada elemento de daño  $D_i$ , usando la ecuación 3.6.

$$R(t_i) = e^{\{-1 * D_i^{\beta_c}\}} \quad (3.6)$$

La ecuación 3.6 fue necesario desarrollarla debido a que para poder usar los elementos de daño acumulado  $D_i$  en la función de confiabilidad Weibull, se tuvo primero que comprobar que los elementos  $D_i$  cumplen con las propiedades de un proceso Poisson no homogéneo (PPNH), las cuales son:

1.  $x(0) = 0$ . El proceso evaluado en cero es cero.
2. El proceso tiene incrementos independientes  $[x(t_2) - x(t_1), x(t_3) - x(t_2) \dots]$
3. La intensidad promedio  $\lambda(t)$  del proceso depende del tiempo.

Los elementos de daño  $D_i$  cumplen estas propiedades de la siguiente manera.

- $D(0) = 0$ . Debido a que los elementos de daño  $D_i$ , dependen del número de ciclos aplicados  $n_i$ , entonces los elementos  $D_i$  cumplen con la primera propiedad del PPNH ya que para  $n_i = 0$ ,  $D(0) = 0$ .
- Los incrementos son independientes  $[x(t_2) - x(t_1), x(t_3) - x(t_2) \dots]$ . Los elementos  $D_i$  cumplen con la propiedad de independencia ya que estos elementos se determinan para cada una de las frecuencias significantes del PSD. De esa forma los elementos  $D_i$  cumplen con la propiedad independencia de los PPNH.
- La intensidad promedio depende del tiempo. Los elementos  $D_i$  dependen del tiempo debido a que en la ecuación 1.4 donde los  $D_i$  se calculan, su estimación está en base a los valores  $n_i$  los cuales a su vez dependen del tiempo.

La ecuación 3.6 se determinó en base a la ecuación de confiabilidad Weibull dada por

$$R(t) = e^{\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right\}} \quad (3.7)$$

la cual en su forma lineal es

$$y = \beta[\ln(t) - \ln(\eta)] \quad (3.8)$$

lo que implica que,

$$\frac{y}{\beta} = \ln(t) - \ln(\eta) \rightarrow \frac{y}{\beta} = \ln\left(\frac{t}{\eta}\right) \quad (3.9)$$

por lo que, tomando la exponencial el daño se puede reescribir como

$$D_i = e^{\frac{y}{\beta}} = \left(\frac{t}{\eta}\right) = H(t)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.10)$$

donde de los datos de vibración, los elementos de daño están dado por

$$D_i = \frac{n_{ieq}}{N_i} \quad (3.11)$$

por lo que, considerando,

$$n_{ieq} = t_i \text{ y } N_i = \eta_i \quad (3.12)$$

La ecuación de confiabilidad definida en la ecuación 3.7, queda como la ecuación de confiabilidad 3.6 propuesta para vibración. Aquí obsérvese que en base a la ecuación 3.11, la ecuación 3.6 puede también ser utilizada para determinar la confiabilidad de los elementos de daño  $D_i$  dentro de cada bloque.

Dado que de la ecuación 3.6, los elementos  $D_i$  están ya en función de eta, entonces en base a ellos el valor de dicha eta para cada elemento se puede estimar como sigue.

**Paso 17.** Determinar el valor de eta ( $\eta_i$ ) que corresponde a cada elemento de daño  $D_i$ . Esto se determina usando el índice de confiabilidad estimado para cada  $n_{ieq}$  en la siguiente ecuación,

$$\eta_i = \frac{n_{ieq}}{\left[-\text{Ln}\left(R(n_{ieq})\right)\right]^{1/\beta}} \quad (3.13)$$

Finalmente, para determinar la confiabilidad de cada elemento  $D_i$  y del elemento mecánico aplique los pasos 18 y 19 como sigue.

**Paso 18.** Determine la confiabilidad de cada bloque del análisis de daño acumulado. Este se determina usando el último elemento  $D_i$  de cada bloque en la ecuación 3.6.

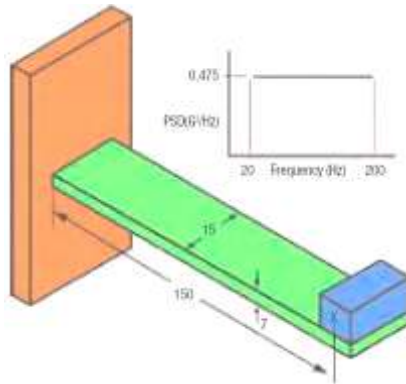
**Paso 19.** Determine la confiabilidad del elemento mecánico analizado. Este índice de confiabilidad está dado por la confiabilidad que presente el primer bloque del análisis de daño acumulado.

## 4. RESULTADOS Y APLICACIÓN

Como resultado de la información del análisis del siguiente caso de aplicación denominado Caso 1, se realizaron. 1) la memoria del congreso internacional en ICONIS 2024 en el que se participó como ponente, obteniéndose el certificado a mejor artículo presentado en el congreso, 2) un artículo de investigación, publicado en el *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* indexado al JCR con factor de impacto 3.1. Los detalles del Caso 1 son los siguientes.

### 4.1 Caso 1.

En este caso, se utiliza una viga en cantiléver publicado en Kumar. Por lo tanto, aquí solo se presentan sus generalidades. Para un análisis más profundo ver (Kumar, 2008). Las propiedades del material son: aluminio Al 6061-T6, módulo de elasticidad  $E = 68.9 \text{ Gpa}$ , relación de Poisson,  $\gamma = 0.3$ , resistencia a la cedencia  $S_y = 276 \text{ Mpa}$ , esfuerzo último de resistencia  $S_{ut} = 310 \text{ Mpa}$ , resistencia a la tensión  $S_e = 96.5 \text{ Mpa}$ , densidad  $\rho = 0.0975 \text{ lb/pul}^3$ , y dimensión de  $150 \text{ mm}$  de largo por  $15 \text{ mm}$  de ancho, por  $7 \text{ mm}$  de alto, como se muestra en la Figura 4.1. La viga soporta un peso  $2Nw$  montado en la punta de la viga y su movimiento está restringido únicamente a la dirección vertical. El elemento debe ser capaz de funcionar en un entorno de vibración aleatoria de ruido blanco con un nivel de energía de entrada en el PSD de  $0.475 \text{ g}^2/\text{Hz}$  (de 20 a 200 Hz), durante un período de 4 horas.



**Figura 4.1. Viga en cantiléver de aluminio** (Kumar, 2008)

**Paso 1.** La recolección de datos de vibración es en base al artículo de Kumar.

**Paso 2.** Para este caso las frecuencias significantes están establecidas en el artículo ya mencionado.

**Paso 3.** El perfil de vibración acelerado se establece en el artículo y se presentan en el siguiente paso.

**Paso 4.** En este paso se mencionan los requerimientos de la prueba de vibración aleatoria, los cuales son;

- Criterio de aprobación: la viga bajo prueba se vibra por 4 horas, con un PSD de entrada de  $0.475 \text{ g}^2/\text{Hz}$  y con una frecuencia continua entre 20 a 200 Hz.
- Alcance: la vibración se aplica en los tres ejes principales (X, Y, Z).
- Requerimiento: Se requiere una confiabilidad del  $R(t) = 97\%$ .

**Paso 5.** Para este paso se determinan los esfuerzos de la tensión mediante los siguientes apartados:

#### 4.1.1. Análisis No Lineal.

El análisis no lineal se basa en las características del material y el medio ambiente aplicado. En este Caso 1, se toma un rango de frecuencia de 20 – 200 Hz con una aceleración de  $0.475 \text{ g}^2/\text{Hz}$ . El perfil de prueba se muestra en la Tabla 4.1.

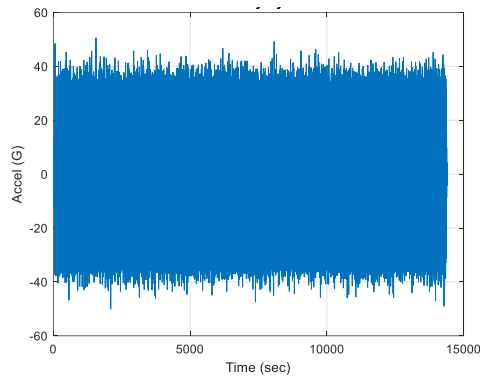
**Tabla 4.1. Perfil de entrada**

Frecuencia (HZ)	Gravedades (G)	Aceleración [ $G^2/\text{Hz}$ ]
20	3.082	0.475
50	4.873	0.475
80	6.164	0.475
120	7.550	0.475
150	8.441	0.475
200	9.747	0.475

Para considerar el efecto del tiempo en la prueba se realiza una simulación en el software Matlab de la siguiente manera.

#### 4.1.2. Incorporación del Efecto del Tiempo al Perfil de Prueba.

Para considerar el tiempo de prueba de 4hrs. (14400s) se usó la librería Vibrationdata de Matlab. Obteniendo el gráfico de aceleración de respuesta, que se muestran en la Figura 4.2 y los datos de aceleración de respuesta correspondientes se muestran en la Tabla 4.2.



**Figura 4.2 Síntesis de aceleración**

**Tabla 4.2. Aceleración de respuesta**

Frecuencia (Hz)	Aceleración de entrada (G)	Aceleración de respuesta ( $A_{res}$ in G)
20	0.475	8.88
50	0.475	19.21
80	0.475	24.33
120	0.475	29.77
150	0.475	33.17
200	0.475	29.03

Enseguida se realiza un análisis estático y modal para considerar la geometría, el peso y la resonancia del material.

#### 4.1.3. Análisis Estático y Modal.

En el análisis estático y modal para incorpora la geometría, el peso y la resonancia se determina la frecuencia natural  $W_n$  en  $Rad/Sec$  con la ecuación 4.1.

$$W_n = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} \quad (4.1)$$

Numéricamente  $W_n$  es estimada como.

$$W_n = \sqrt{\frac{3(9993100.12 \frac{lb}{in^2})(0.0010976 in^4)}{(0.000937757 \frac{lb \cdot sec^2}{in})(6.3^3)}} = 374.60 \frac{Rad}{Sec}$$

Así basados en  $W_n$  la frecuencia natural correspondiente es,

$$f_n = \frac{W_n}{2\pi} \quad (4.2)$$

$$f_n = \frac{374.60}{2\pi} \approx 60 \text{ Hz}$$

El siguiente paso es la determinación del factor dinámico correspondiente al estrés de vibración de flexión, es determinado como,

$$\sigma_{dinámico} = \left( \frac{K m_e \hat{L} C}{I} \right) A \quad (4.3)$$

donde  $k = 1$ , es el factor de concentración de estrés,  $C = 0.1377 \text{ in}$ , es la distancia al eje central,  $\hat{L} = 5.9 \text{ in}$ , es la distancia del punto fijo al punto del componente de la masa de aplicación,  $A = 386 \text{ in/sec}^2$  es la constante de gravedad,  $I = 0.0010976 \text{ in}^4$  es el momento de inercia y  $m_e = 0.001232311 \text{ lb} - \text{sec}^2/\text{in}$  es la masa efectiva. Por lo tanto, la determinación numérica del factor dinámico es como sigue,

$$\sigma_{dinámico} = \left( \frac{(1)(0.001232311 \text{ lb} - \text{sec}^2/\text{in})(5.9 \text{ in})(0.1377 \text{ in})}{(0.0010976 \text{ in}^4)} \right) 386 \text{ in/sec}^2$$

$$\sigma_{dinámico} = 352.08 \text{ Psi} = 2.42 \text{ MPa}$$

#### 4.1.4. Análisis de Esfuerzos de Flexión

Los esfuerzos de flexión utilizados para calcular los ciclos a la falla, basados en la aceleración de respuesta de la Tabla 4.2 y el factor dinámico dado en la ecuación 4.4 se presentan en la Tabla 4.3. Se determina como,

$$\sigma_{vb} = \sigma_{dinámico} * A_{res} \quad (4.4)$$

**Table 4.3. Perfil de vibración con esfuerzo de flexión**

Frecuencia (Hz)	Aceleración de respuesta $A_{res} (G^2/Hz)$	Factor dinámico $\sigma_{dynamic} (Mpa)$	Estrés de flexión $\sigma_{vib} (Mpa)$
20	8.88	2.42	21.5784
50	19.21		46.6803
80	24.32		59.0976
120	29.77		72.3411
150	33.17		80.6031
200	29.03		70.5429

**Paso 6.** Así, usando el esfuerzo de flexión de la Tabla 4.3 en la fórmula de Basquin, los ciclos a la falla correspondientes se determinan respectivamente de la ecuación 4.5.

$$N_i = \left( \frac{\sigma_{vib/flexión}}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (4.5)$$

Utilizando los coeficientes del material donde,  $f$  es la fracción de resistencia a la fatiga con valor de 0.92,  $S_{ut}$  es el esfuerzo último de resistencia igual a 310 *Mpa* y  $S_e$  es la resistencia a la fatiga igual a 96.5 *Mpa*

$$b = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{f S_{ut}}{S_e} \right] \quad (4.6)$$

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} \quad (4.7)$$

$$b = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.92 \cdot 310 \text{ Mpa}}{96.5 \text{ Mpa}} \right] = -0.1568 \quad \text{y} \quad a = \frac{(0.92 \cdot 310 \text{ Mpa})^2}{96.5 \text{ Mpa}} = 842.89. \text{ Los datos } N_i$$

de los ciclos a la falla se presentan en la Tabla 4.4.

**Tabla 4.4. Resultados de ciclos a la falla ( $N_i$ )**

Frecuencia (HZ)	Estrés de flexión $\sigma_{vib}$ (Mpa)	$N_i$ (Ciclos a la falla)
20	21.5784	1.40E+10
50	46.6803	1.02E+08
80	59.0976	2.28E+07
120	72.3411	6.28E+06
150	80.6031	3.15E+06
200	70.5429	7.37E+06

Nota: Tomado de (Hernández Ramos et al., 2025).

**Paso 7.** Por otra parte, los ciclos aplicados se determinan utilizando el algoritmo Rainflow (ASTM E 1049-85) de Matlab. Que son mostrados en la Tabla 4.5.

**Tabla 4.5. Ciclos aplicados ( $n_i$ ) Rainflow**

Frecuencia (Hz)	$n_i$ (ciclos aplicados)
20	110437
50	74883.5
80	114802
120	137055
150	249066
200	156561.5

**Paso 8.** Basados en los valores de  $N_i$  de la Tabla 4.4 y los valores de  $n_i$  de la Tabla 4.5, el daño acumulado se realiza como sigue.

#### 4.1.5. Determinación del Daño Acumulado.

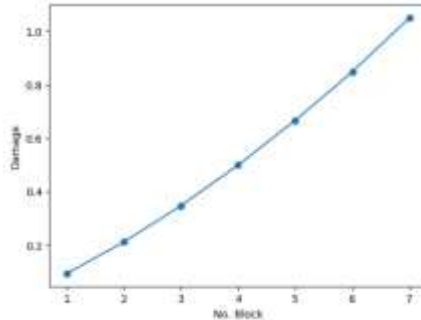
La acumulación del daño por vibración se realiza utilizando el modelo de curva no lineal de la ecuación 1.4. El daño acumulado hasta  $D = 1$  se da en la Tabla 4.6.

**Tabla 4.6. Resultados del cálculo de los daños acumulados**

	20 Hz		50 Hz		80 Hz		120 Hz		150 Hz		200 Hz
Block No.	$D_1$	$n_{eq}+n_2$	$D_{1+2}$	$n_{eq}+n_3$	$D_{1+2+3}$	$n_{eq}+n_4$	$D_{1+2+3+4}$	$n_{eq}+n_5$	$D_{1+2+3+4+5}$	$n_{eq}+n_6$	$D_{1+2+3+4+5+6}$
1	7.88E-06	9.84E+06	8.18E-06	2.07E+06	1.07E-05	1.46E+05	1.36E-03	2.53E+05	8.04E-02	2.99E+06	9.27E-02
2	9.27E-02	6.37E+07	9.32E-02	1.40E+07	9.70E-02	1.80E+06	1.11E-01	6.00E+05	1.91E-01	4.09E+06	2.11E-01
3	2.11E-01	7.51E+07	2.12E-01	1.66E+07	2.19E-01	2.78E+06	2.40E-01	1.00E+06	3.19E-01	4.94E+06	3.47E-01
4	3.47E-01	8.30E+07	3.49E-01	1.84E+07	3.59E-01	3.64E+06	3.84E-01	1.46E+06	4.63E-01	5.66E+06	4.99E-01
5	4.99E-01	8.92E+07	5.01E-01	1.98E+07	5.15E-01	4.44E+06	5.44E-01	1.96E+06	6.23E-01	6.32E+06	6.66E-01
6	6.66E-01	9.45E+07	6.69E-01	2.11E+07	6.87E-01	5.20E+06	7.19E-01	2.52E+06	7.99E-01	6.92E+06	8.48E-01
7	8.48E-01	9.92E+07	8.51E-01	2.21E+07	8.73E-01	5.95E+06	9.09E-01	3.11E+06	9.88E-01	7.49E+06	1.05E+00

Nota. Tomado de (Hernández Ramos et al., 2025).

**Paso 9.** De los resultados dados en la Tabla 4.6, notamos que el daño  $D = 1.0$  (falla por fatiga) se alcanza en el bloque 7, en la Figura 4.3 se representa la relación de la línea de daño de la viga sometida a cargas de vibración aleatoria.



**Figura 4.3. Comportamiento de la curva de daño.**

**Paso 10.** Usando los datos del perfil de vibración dados en la tabla 4.7 y la media aritmética de rangos medianos que corresponde a una confiabilidad del 97%, en la ecuación 3.1 el valor de beta de la distribución del estrés ( $\beta_E$ ) es,

**Tabla 4.7. Área del perfil de prueba.**

FREQ(Hz)	ASD(G <sup>2</sup> /Hz)	ÁREA	Grms
20.00	0.4750	<b>9.50</b>	3.08

50.00	0.4750	14.25	3.77
80.00	0.4750	28.50	5.34
120.00	0.4750	47.50	6.89
150.00	0.4750	61.75	7.86
200.00	0.4750	<b>85.50</b>	9.247

$$\beta_E = \frac{-4 * (-0.5547)}{0.9975 * \ln(85.50/9.50)} = 1.0125$$

**Paso 11.** En base a la ecuación 3.2 el valor de eta ( $\eta_E$ ) del estrés es,

$$\eta_E = \sqrt{(80.6031) \cdot (21.5784)} = 41.7047$$

**Paso 12.** En base a la ecuación 4.6 el valor del coeficiente de fatiga del material del elemento mecánico es,

$$b = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.92 * 310 \text{ Mpa}}{96.5 \text{ MPa}} \right] = -0.1568$$

**Paso 13.** En base a la ecuación 3.3 el valor de beta de resistencia ( $\beta_R$ ) es,

$$\beta_R = (1.0125)(6.3745) = 6.4543$$

**Paso 14.** En base a la ecuación 3.4 el valor de eta de resistencia ( $\eta_R$ ) es,

$$\eta_R = \sqrt{(285.2)(96.5)} = 165.8969$$

**Paso 15.** En base a la ecuación 3.5 el valor de beta Weibull común ( $\beta_c$ ) es,

$$\beta_c = \frac{\ln((0.97)/(0.03))}{\ln\left(\frac{165.8969}{41.7047}\right)} = 2.5175$$

**Paso 16.** En la Tabla 4.8 el valor del índice de confiabilidad que corresponde a cada uno de los daños  $D_i$  es,

**Paso 17.** En la Tabla 4.8 el valor de los elementos  $\eta_i$  que corresponden a cada uno de los daños  $D_i$  es,

**Tabla 4.8. Resumen del análisis de daño acumulado por bloques  $\beta = 2.5175$ .**

<b>Bloque 1</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	0.000008	0.000008	0.000011	0.001359	0.080424	0.092679
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	1.000000	1.000000	1.000000	0.99999994	0.998246	0.997495
<b>n<sub>ieq</sub></b>	1.10E+05	9844194.1745	2070793.2004	146354.8597	253347.6474	2993717.2565
<b>η</b>	1.40E+10	1.20E+12	1.93E+11	1.08E+08	3.15E+06	3.23E+07
<b>Bloque 2</b>						
<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>	
<b>D</b>	0.092687	0.093234	0.096978	0.111455	0.190519	0.211205
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	0.997494	0.997457	0.997192	0.99601705	0.984728	0.980248
<b>n<sub>ieq</sub></b>	1.10E+05	63741504.4362	13967924.1449	1799452.5535	600167.1037	4089575.3686
<b>η</b>	1.19E+06	6.84E+08	1.44E+08	1.61E+07	3.15E+06	1.94E+07
<b>Bloque 3</b>						
<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>	
<b>D</b>	0.211213	0.212269	0.219426	0.239773	0.318838	0.347161
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	0.980246	0.979999	0.978276	0.97291674	0.945289	0.932665
<b>n<sub>ieq</sub></b>	1.10E+05	75141298.5128	16574955.0381	2783438.5685	1004391.9805	4936402.8615
<b>η</b>	5.23E+05	3.54E+08	7.55E+07	1.16E+07	3.15E+06	1.42E+07
<b>Bloque 4</b>						
<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>	
<b>D</b>	0.347169	0.348740	0.359323	0.384367	0.463432	0.499038
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	0.932662	0.931919	0.926797	0.91386369	0.865670	0.840464
<b>n<sub>ieq</sub></b>	1.10E+05	82984683.4795	18379932.7636	3641478.5470	1459885.8765	5663617.8214
<b>η</b>	3.18E+05	2.38E+08	5.12E+07	9.47E+06	3.15E+06	1.13E+07
<b>Bloque 5</b>						
<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>	
<b>D</b>	0.499046	0.501146	0.515229	0.544399	0.623463	0.666171
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	0.840458	0.838908	0.828326	0.80544765	0.737570	0.697922
<b>n<sub>ieq</sub></b>	1.10E+05	89225225.3764	19821958.4851	4439710.4883	1964011.3842	6318324.1153
<b>η</b>	2.21E+05	1.78E+08	3.85E+07	8.16E+06	3.15E+06	9.48E+06

Bloque 6	D1	D2	D3	D4	D5	D6
$D$	0.666179	0.668824	0.686505	0.719452	0.798517	0.848231
$R(n_{ieq})$	0.697915	0.695403	0.678462	0.64628256	0.566916	0.516466
$n_{ieq}$	1.10E+05	94526806.4543	21050840.0254	5203561.2843	2515459.4615	6923692.6626
$\eta$	1.66E+05	1.41E+08	3.07E+07	7.23E+06	3.15E+06	8.16E+06
Bloque 7	D1	D2	D3	D4	D5	D6
$D$	0.848239	0.851448	0.872835	0.909325	0.988389	1.045066
$R(n_{ieq})$	0.516458	0.513209	0.491613	0.45512578	0.378694	0.327141
$n_{ieq}$	1.10E+05	9.92E+07	2.21E+07	5.95E+06	3.11E+06	7.49E+06
$\eta$	1.30E+05	1.17E+08	2.54E+07	6.54E+06	3.15E+06	7.17E+06

Nota. Tomado de (Hernández Ramos et al., 2025).

**Paso 18.** En la Tabla 4.9 el valor del índice de confiabilidad de cada bloque es,

**Tabla 4.9. Confiabilidad de cada bloque.**

Bloque	1	2	3	4	5	6	7
$R(t)$	0.997495	0.980248	0.932665	0.840464	0.697922	0.516466	0.327141

**Paso 19.** De la Tabla 4.9, la confiabilidad del elemento analizado es  $R(t) = 0.997495$ .

## 4.2. Caso 2.

En este caso 2, se utiliza un soporte sometido a carga de flexión publicado por Barraza Contreras. Por lo tanto, aquí solo se presentan sus generalidades. Para un análisis más profundo ver (Barraza-Contreras et al., 2022). Las propiedades del material son: acero estirado en frío AISI 1025, con un módulo de elasticidad  $E = 200 \text{ GPa}$ , relación de Poisson  $\gamma = 0.29$ , resistencia a la cedencia  $S_y = 430 \text{ MPa}$ , esfuerzo último de resistencia  $S_{ut} = 510 \text{ MPa}$ , resistencia a la tensión  $S_e = 255 \text{ MPa}$ , densidad  $\rho = 7.9 \text{ g/cm}^3$ , longitud  $L = 51 \text{ mm}$ , anchura  $W = 200 \text{ mm}$  y espesor de pared de  $3 \text{ mm}$ . Durante su funcionamiento, el elemento soporta una carga de  $80 \text{ N}$  y su movimiento es libre solo en dirección vertical. La zona A (color púrpura) indica que está fijo, y la zona B (color rojo) es la carga aplicada. Se considera una viga en voladizo y se somete a una vibración aleatoria de funcionamiento con un PSD de entrada con frecuencias que oscilan entre  $10$  y  $55 \text{ Hz}$  a una amplitud de  $1.5 \text{ mm}$  durante un periodo de  $2 \text{ horas}$ . La prueba se lleva a cabo físicamente utilizando un sistema de vibración.



**Figura 4.4. Soporte sometido a Fatiga por vibración aleatoria.**

**Paso 1.** La recolección de datos de vibración es en base al artículo de Barraza.

**Paso 2.** Para este caso las frecuencias significantes están establecidas en el artículo mencionado.

**Paso 3.** El perfil de vibración acelerado se establece en el artículo y se presentan en el siguiente paso.

**Paso 4.** En este paso se mencionan los requerimientos de la prueba de vibración aleatoria, los cuales son;

- Criterio de aprobación: el soporte bajo prueba se vibra por 2 horas, con una amplitud de 1.5 mm y con una frecuencia continua entre 10 a 55 Hz.
- Alcance: la vibración se aplica en los tres ejes principales (X, Y, Z).
- Requerimiento: Se requiere una confiabilidad del  $R(t) = 97\%$ .

**Paso 5.** Para este paso se determinan los esfuerzos de la tensión mediante los siguientes apartados:

#### 4.2.1. Análisis No Lineal.

El análisis no lineal se basa en las características del material y el medio ambiente aplicado.

En este Caso 2, se toma un rango de frecuencia de 10 – 55 Hz con una amplitud de 1.5 mm.

El perfil de prueba se muestra en la Tabla 4.10.

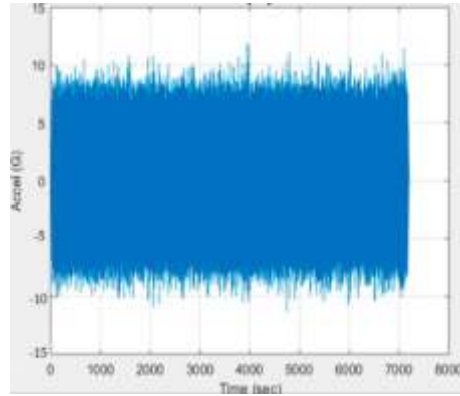
**Tabla 4.10. Perfil de entrada**

Frecuencia (HZ)	Gravedades (G)	Aceleración [ $G^2/Hz$ ]
10	0.210	0.004
20	0.666	0.022
30	1.383	0.063
40	2.359	0.139
50	3.900	0.300
55	4.664	0.400

Para considerar el efecto del tiempo en la prueba se realiza una simulación en el software Matlab de la siguiente manera.

#### 4.1.2. Incorporación del Efecto del Tiempo al Perfil de Prueba.

Para considerar el tiempo de prueba de 2hrs. (7200s) se usó la librería Vibrationdata de Matlab. Obteniendo el gráfico de aceleración de respuesta, que se muestran en la Figura 4.5 y los datos de aceleración de respuesta correspondientes se muestran en la Tabla 4.11.



**Figura 4.5 Síntesis de aceleración**

**Tabla 4.11. Aceleración de respuesta**

Frecuencia (Hz)	Aceleración de entrada (G)	Aceleración de respuesta ( $A_{res}$ in G)
10	0.210	0.69
20	0.666	3.06
30	1.383	5.58
40	2.359	9.09
50	3.900	13.68
55	4.664	12.31

Enseguida se realiza un análisis estático y modal para considerar la geometría, el peso y la resonancia del material.

#### 4.1.3. Análisis Estático y Modal.

En el análisis estático y modal para incorpora la geometría, el peso y la resonancia se determina la frecuencia natural  $W_n$  en *Rad/Sec* con la ecuación 4.1. Numéricamente  $W_n$  es estimada como.

$$W_n = \sqrt{\frac{3(30167849 \frac{lb}{in^2})(0.00114 in^4)}{(0.11 \frac{lb - sec^2}{in})(2.1^3)}} = 317.91 \frac{Rad}{Sec}$$

Así basados en  $W_n$  la frecuencia natural correspondiente es,

$$f_n = \frac{317.91}{2\pi} \approx 50 Hz$$

El siguiente paso es la determinación del factor dinámico correspondiente al estrés de vibración de flexión, mediante la ecuación 4.3. Donde,  $k = 2.5$ , es el factor de concentración de estrés,  $C = 0.06 in$ , es la distancia al eje central,  $\hat{L} = 0.575 in$ , es la distancia del punto fijo al punto del componente de la masa de aplicación,  $A = 386 in/sec^2$  es la constante de gravedad,  $I = 0.00114 in^4$  es el momento de inercia y  $m_e = 0.11 lb - sec^2/in$  es la masa efectiva. Por lo tanto, la determinación numérica del factor dinámico es como sigue.

$$\sigma_{dinámico} = \left( \frac{(2.5)(0.11 lb - sec^2/in)(0.575 in)(0.06 in)}{(0.00114 in^4)} \right) 386 in/sec^2$$

$$\sigma_{dinámico} = 3219.21 Psi = 22.22 MPa$$

#### 4.1.4. Análisis de Esfuerzos de Flexión

Los esfuerzos de flexión utilizados para calcular los ciclos a la falla, basados en la aceleración de respuesta de la Tabla 4.11 y el factor dinámico obtenido en sección 4.1.3 se presentan en la Tabla 4.12.

**Table 4.12. Perfil de vibración con esfuerzo de flexión**

Frecuencia (Hz)	Aceleración de respuesta $A_{res} (G^2/Hz)$	Factor dinámico $\sigma_{dynamic} (Mpa)$	Estrés de flexión $\sigma_{vib} (Mpa)$
10	0.69	22.22	15.33
20	3.06		67.97
30	5.58		123.95
40	9.09		201.91
50	13.68		303.87
55	12.31		273.44

**Paso 6.** Así, usando el esfuerzo de flexión de la Tabla 4.12 en la fórmula de Basquin, los ciclos a la falla correspondientes se determinan respectivamente de la ecuación 4.5.

Utilizando los coeficientes del material donde,  $f$  es la fracción de resistencia a la fatiga con valor de 0.9,  $S_{ut}$  es el esfuerzo último de resistencia igual a 510 *Mpa* y  $S_e$  es la resistencia a la fatiga igual a 255 *Mpa*.

$$b = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.9 \cdot 510 \text{ Mpa}}{255 \text{ Mpa}} \right] = -0.085 \quad \text{y} \quad a = \frac{(0.9 \cdot 510 \text{ Mpa})^2}{255 \text{ Mpa}} = 826.2$$

Los datos  $N_i$  de los ciclos a la falla se presentan en la Tabla 4.13.

**Tabla 4.13. Resultados de ciclos a la falla ( $N_i$ )**

Frecuencia (HZ)	Estrés de flexión $\sigma_{vib} (Mpa)$	$N_i$ (Ciclos a la falla)
10	15.33	2.24E+20
20	67.97	5.60E+12
30	123.95	4.81E+9
40	201.91	1.55E+7
50	303.87	1.27E+5

55	273.44	4.40E+5
----	--------	---------

**Paso 7.** Por otra parte, los ciclos aplicados se determinan utilizando el algoritmo Rainflow (ASTM E 1049-85) de Matlab. Estos ciclos se muestran en la Tabla 4.14.

**Tabla 4.14. Ciclos aplicados ( $n_i$ ) Rainflow**

Frecuencia (Hz)	$n_i$ (ciclos aplicados)
10	70292
20	140210
30	92650
40	10869
50	3010
55	816

**Paso 8.** Basados en los valores de  $N_i$  de la Tabla 4.13 y los valores de  $n_i$  de la Tabla 4.14, el daño acumulado se realiza como sigue.

#### 4.1.5. Determinación del Daño Acumulado.

La acumulación del daño por vibración se realiza utilizando el modelo de curva no lineal de la ecuación 1.4. El daño acumulado hasta  $D = 1$  se da en la Tabla 4.15.

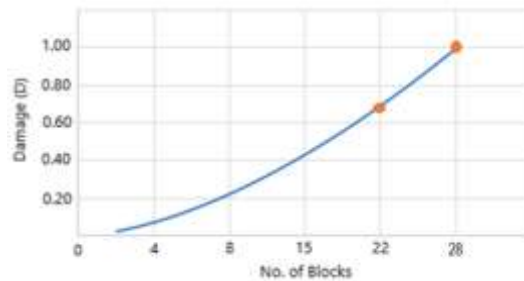
**Tabla 4.15. Resultados del cálculo de los daños acumulados**

Block No.	10 Hz		20 Hz		30 Hz		40 Hz		50 Hz		55 Hz	
	$D_1$	$n_{eq}+n_2$	$D_{1+2}$	$n_{eq}+n_3$	$D_{1+2+3}$	$n_{eq}+n_4$	$D_{1+2+3+4}$	$n_{eq}+n_5$	$D_{1+2+3+4+5}$	$n_{eq}+n_6$	$D_{1+2+3+4+5+6}$	
1	3.14E-16	2.85E+12	3.14E-16	4.31E+09	3.16E-16	2.40E+06	3.44E-16	3.01E+03	2.36E-02	1.73E+05	2.41E-02	
2	2.41E-02	5.22E+12	2.41E-02	4.76E+09	2.42E-02	1.28E+07	2.46E-02	6.15E+03	4.83E-02	2.06E+05	4.90E-02	
3	4.90E-02	5.29E+12	4.90E-02	4.77E+09	4.93E-02	1.33E+07	5.01E-02	9.39E+03	7.37E-02	2.29E+05	7.48E-02	
4	7.48E-02	5.33E+12	7.48E-02	4.77E+09	7.53E-02	1.35E+07	7.64E-02	1.27E+04	1.00E-01	2.48E+05	1.01E-01	
5	1.01E-01	5.36E+12	1.01E-01	4.78E+09	1.02E-01	1.38E+07	1.04E-01	1.62E+04	1.27E-01	2.63E+05	1.29E-01	
6	1.29E-01	5.39E+12	1.29E-01	4.78E+09	1.30E-01	1.39E+07	1.32E-01	1.98E+04	1.55E-01	2.76E+05	1.57E-01	

7	1.57E-01	5.41E+12	1.57E-01	4.78E+09	1.58E-01	1.41E+07	1.60E-01	2.34E+04	1.84E-01	2.89E+05	1.86E-01
8	1.86E-01	5.43E+12	1.86E-01	4.79E+09	1.87E-01	1.42E+07	1.90E-01	2.72E+04	2.14E-01	3.00E+05	2.16E-01
9	2.16E-01	5.44E+12	2.16E-01	4.79E+09	2.17E-01	1.43E+07	2.20E-01	3.11E+04	2.44E-01	3.10E+05	2.47E-01
10	2.47E-01	5.45E+12	2.47E-01	4.79E+09	2.48E-01	1.44E+07	2.52E-01	3.51E+04	2.75E-01	3.19E+05	2.78E-01
11	2.78E-01	5.47E+12	2.78E-01	4.79E+09	2.80E-01	1.45E+07	2.84E-01	3.92E+04	3.08E-01	3.28E+05	3.11E-01
12	3.11E-01	5.48E+12	3.11E-01	4.79E+09	3.13E-01	1.46E+07	3.17E-01	4.34E+04	3.41E-01	3.37E+05	3.44E-01
13	3.44E-01	5.49E+12	3.44E-01	4.79E+09	3.46E-01	1.47E+07	3.51E-01	4.77E+04	3.75E-01	3.45E+05	3.78E-01
14	3.78E-01	5.50E+12	3.78E-01	4.80E+09	3.81E-01	1.47E+07	3.86E-01	5.22E+04	4.10E-01	3.53E+05	4.13E-01
15	4.13E-01	5.51E+12	4.13E-01	4.80E+09	4.16E-01	1.48E+07	4.22E-01	5.68E+04	4.45E-01	3.60E+05	4.49E-01
16	4.49E-01	5.52E+12	4.49E-01	4.80E+09	4.52E-01	1.49E+07	4.59E-01	6.15E+04	4.82E-01	3.67E+05	4.87E-01
17	4.87E-01	5.52E+12	4.87E-01	4.80E+09	4.90E-01	1.49E+07	4.96E-01	6.63E+04	5.20E-01	3.74E+05	5.25E-01
18	5.25E-01	5.53E+12	5.25E-01	4.80E+09	5.28E-01	1.50E+07	5.35E-01	7.12E+04	5.59E-01	3.81E+05	5.25E-01
19	5.25E-01	5.54E+12	5.25E-01	4.80E+09	5.67E-01	1.51E+07	5.75E-01	7.63E+04	5.99E-01	3.88E+05	6.04E-01
20	6.04E-01	5.55E+12	6.04E-01	4.80E+09	6.07E-01	1.51E+07	6.16E-01	8.15E+04	6.39E-01	3.94E+05	6.45E-01
21	6.45E-01	5.55E+12	6.45E-01	4.80E+09	6.49E-01	1.52E+07	6.58E-01	8.68E+04	6.81E-01	4.01E+05	6.87E-01
22	6.87E-01	5.56E+12	6.87E-01	4.80E+09	6.91E-01	1.52E+07	7.01E-01	9.23E+04	7.24E-01	4.07E+05	7.30E-01
23	7.30E-01	5.57E+12	7.30E-01	4.81E+09	7.35E-01	1.53E+07	7.45E-01	9.79E+04	7.68E-01	4.13E+05	7.74E-01
24	7.74E-01	5.57E+12	7.74E-01	4.81E+09	7.79E-01	1.53E+07	7.90E-01	1.04E+05	8.13E-01	4.19E+05	8.20E-01
25	8.20E-01	5.58E+12	8.20E-01	4.81E+09	8.25E-01	1.54E+07	8.36E-01	1.10E+05	8.60E-01	4.25E+05	8.66E-01
26	8.66E-01	5.59E+12	8.66E-01	4.81E+09	8.72E-01	1.54E+07	8.83E-01	1.16E+05	9.07E-01	4.31E+05	9.14E-01
27	9.14E-01	5.59E+12	9.14E-01	4.81E+09	9.20E-01	1.54E+07	9.32E-01	1.22E+05	9.56E-01	4.36E+05	9.63E-01
28	9.63E-01	5.60E+12	9.63E-01	4.81E+09	9.69E-01	1.55E+07	9.82E-01	1.28E+05	1.01E+00	4.42E+05	1.01E+00

Nota. Tomado de (Barraza-Contreras et al., 2022)

**Paso 9.** De los resultados dados en la Tabla 4.15, notamos que el daño  $D = 1.0$  (falla por fatiga) se alcanza en el bloque 28, en la Figura 4.6 se representa la relación de la línea de daño del soporte sometida a cargas de vibración aleatoria.



**Figura 4.6. Comportamiento de la curva de daño.**

**Paso 10.** Usando los datos del perfil de vibración dados en la tabla 4.16 y la media aritmética de rangos medianos que corresponde a una confiabilidad del 97%, en la ecuación 3.1 el valor de beta de la distribución del estrés ( $\beta_E$ ) es,

**Tabla 4.16. Área del perfil de prueba.**

FREQ(Hz)	ASD(G <sup>2</sup> /Hz)	AREA	Grms
10.00	0.0040	<b>0.04</b>	0.20
20.00	0.0220	0.12	0.34
30.00	0.0630	0.52	0.72
40.00	0.1390	1.50	1.22
50.00	0.3000	3.62	1.90
55.00	0.4000	<b>5.36</b>	2.316

$$\beta_E = \frac{-4 * (-0.5547)}{0.9975 * \ln(5.36/0.04)} = 0.4541$$

**Paso 11.** En base a la ecuación 3.2 el valor de eta ( $\eta_E$ ) del estrés es,

$$\eta_E = \sqrt{(303.87) \cdot (15.33)} = 68.2519$$

**Paso 12.** En base a la ecuación 4.6 el valor del coeficiente de fatiga del material del elemento mecánico es,

$$b = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0.9 * 380 \text{ Mpa}}{255 \text{ MPa}} \right] = -0.085$$

**Paso 13.** En base a la ecuación 3.3 el valor de beta de resistencia ( $\beta_R$ ) es,

$$\beta_R = (0.4541)(11.7647) = 5.3434$$

**Paso 14.** En base a la ecuación 3.4 el valor de eta de resistencia ( $\eta_R$ ) es,

$$\eta_R = \sqrt{(459)(255)} = 342.1184$$

**Paso 15.** En base a la ecuación 3.5 el valor de beta Weibull común ( $\beta_c$ ) es,

$$\beta_c = \frac{\ln((0.97)/(0.03))}{\ln\left(\frac{342.1184}{68.2519}\right)} = 2.1564$$

**Paso 16.** En la Tabla 4.17 el valor del índice de confiabilidad que corresponde a cada uno de los daños  $D_i$  es,

**Paso 17.** En la Tabla 4.17 el valor de los elementos eta  $\eta_i$  que corresponden a cada uno de los daños  $D_i$  es,

**Tabla 4.17. Resumen del análisis de daño acumulado por bloques  $\beta = 2.1564$ .**

<b>Bloque 1</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	3.14E-16	3.14E-16	3.16E-16	3.44E-16	2.36E-02	2.41E-02
<b>R(<math>n_{ieq}</math>)</b>	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00
<b><math>n_{ieq}</math></b>	7.03E+04	2.85E+12	4.31E+09	2.40E+06	3.01E+03	1.73E+05
<b><math>\eta</math></b>	#_iDIV/0!	#_iDIV/0!	#_iDIV/0!	#_iDIV/0!	1.28E+05	7.18E+06
<b>Bloque 2</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	2.41E-02	2.41E-02	2.42E-02	2.46E-02	4.83E-02	4.90E-02
<b>R(<math>n_{ieq}</math>)</b>	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	9.99E-01	9.99E-01
<b><math>n_{ieq}</math></b>	7.03E+04	5.22E+12	4.76E+09	1.28E+07	6.15E+03	2.06E+05
<b><math>\eta</math></b>	2.92E+06	2.17E+14	1.97E+11	5.20E+08	1.27E+05	4.20E+06
<b>Bloque 3</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	4.90E-02	4.90E-02	4.93E-02	5.01E-02	7.37E-02	7.48E-02
<b>R(<math>n_{ieq}</math>)</b>	9.99E-01	9.99E-01	9.98E-01	9.98E-01	9.96E-01	9.96E-01
<b><math>n_{ieq}</math></b>	7.03E+04	5.29E+12	4.77E+09	1.33E+07	9.39E+03	2.29E+05
<b><math>\eta</math></b>	1.43E+06	1.08E+14	9.68E+10	2.65E+08	1.27E+05	3.06E+06
<b>Bloque 4</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	7.48E-02	7.48E-02	7.53E-02	7.64E-02	1.00E-01	1.01E-01
<b>R(<math>n_{ieq}</math>)</b>	9.96E-01	9.96E-01	9.96E-01	9.96E-01	9.93E-01	9.93E-01
<b><math>n_{ieq}</math></b>	7.03E+04	5.33E+12	4.77E+09	1.35E+07	1.27E+04	2.48E+05
<b><math>\eta</math></b>	9.40E+05	7.13E+13	6.33E+10	1.77E+08	1.27E+05	2.46E+06

<b>Bloque 5</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	1.01E-01	1.01E-01	1.02E-01	1.04E-01	1.27E-01	1.29E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.93E-01	9.93E-01	9.93E-01	9.92E-01	9.88E-01	9.88E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.36E+12	4.78E+09	1.38E+07	1.62E+04	2.63E+05
<i>η</i>	6.96E+05	5.31E+13	4.69E+10	1.33E+08	1.28E+05	2.04E+06
<b>Bloque 6</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	1.29E-01	1.29E-01	1.30E-01	1.32E-01	1.55E-01	1.57E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.88E-01	9.88E-01	9.88E-01	9.87E-01	9.82E-01	9.82E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.39E+12	4.78E+09	1.39E+07	1.98E+04	2.76E+05
<i>η</i>	5.45E+05	4.18E+13	3.68E+10	1.05E+08	1.28E+05	1.76E+06
<b>Bloque 7</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	1.57E-01	1.57E-01	1.58E-01	1.60E-01	1.84E-01	1.86E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.82E-01	9.82E-01	9.81E-01	9.81E-01	9.74E-01	9.74E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.41E+12	4.78E+09	1.41E+07	2.34E+04	2.89E+05
<i>η</i>	4.48E+05	3.45E+13	3.03E+10	8.81E+07	1.27E+05	1.55E+06
<b>Bloque 8</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	1.86E-01	1.86E-01	1.87E-01	1.90E-01	2.14E-01	2.16E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.74E-01	9.74E-01	9.73E-01	9.73E-01	9.65E-01	9.64E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.43E+12	4.79E+09	1.42E+07	2.72E+04	3.00E+05
<i>η</i>	3.78E+05	2.92E+13	2.56E+10	7.47E+07	1.27E+05	1.39E+06
<b>Bloque 9</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	2.16E-01	2.16E-01	2.17E-01	2.20E-01	2.44E-01	2.47E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.64E-01	9.64E-01	9.64E-01	9.63E-01	9.53E-01	9.52E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.44E+12	4.79E+09	1.43E+07	3.11E+04	3.10E+05
<i>η</i>	3.25E+05	2.52E+13	2.21E+10	6.50E+07	1.27E+05	1.26E+06
<b>Bloque 10</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	2.17E-01	2.47E-01	2.48E-01	2.52E-01	2.75E-01	2.78E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.64E-01	9.52E-01	9.52E-01	9.50E-01	9.40E-01	9.39E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.45E+12	4.79E+09	1.44E+07	3.51E+04	3.19E+05
<i>η</i>	3.24E+05	2.21E+13	1.93E+10	5.71E+07	1.28E+05	1.15E+06
<b>Bloque 11</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	2.78E-01	2.78E-01	2.80E-01	2.84E-01	3.08E-01	3.11E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.39E-01	9.39E-01	9.38E-01	9.36E-01	9.24E-01	9.23E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.47E+12	4.79E+09	1.45E+07	3.92E+04	3.28E+05
<i>η</i>	2.53E+05	1.97E+13	1.71E+10	5.11E+07	1.27E+05	1.05E+06
<b>Bloque 12</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	3.11E-01	3.11E-01	3.13E-01	3.17E-01	3.41E-01	3.44E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.23E-01	9.23E-01	9.22E-01	9.19E-01	9.06E-01	9.05E-01
<i>n<sub>ieq</sub></i>	7.03E+04	5.48E+12	4.79E+09	1.46E+07	4.34E+04	3.37E+05
<i>η</i>	2.26E+05	1.76E+13	1.53E+10	4.61E+07	1.27E+05	9.80E+05
<b>Bloque 13</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<i>D</i>	3.44E-01	3.44E-01	3.46E-01	3.51E-01	3.75E-01	3.78E-01
<i>R(n<sub>ieq</sub>)</i>	9.05E-01	9.05E-01	9.04E-01	9.01E-01	8.86E-01	8.85E-01

$n_{ieq}$	7.03E+04	5.49E+12	4.79E+09	1.47E+07	4.77E+04	3.45E+05
$\eta$	2.04E+05	1.60E+13	1.38E+10	4.19E+07	1.27E+05	9.13E+05
<b>Bloque 14</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	3.78E-01	3.78E-01	3.81E-01	3.86E-01	4.10E-01	4.13E-01
$R(n_{ieq})$	8.85E-01	8.85E-01	8.83E-01	8.80E-01	8.64E-01	8.62E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.50E+12	4.80E+09	1.47E+07	5.22E+04	3.53E+05
$\eta$	1.86E+05	1.46E+13	1.26E+10	3.81E+07	1.27E+05	8.55E+05
<b>Bloque 15</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	4.13E-01	4.13E-01	4.16E-01	4.22E-01	4.45E-01	4.49E-01
$R(n_{ieq})$	8.62E-01	8.62E-01	8.60E-01	8.56E-01	8.40E-01	8.37E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.51E+12	4.80E+09	1.48E+07	5.68E+04	3.60E+05
$\eta$	1.70E+05	1.33E+13	1.15E+10	3.51E+07	1.28E+05	8.02E+05
<b>Bloque 16</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	4.49E-01	4.49E-01	4.52E-01	4.59E-01	4.82E-01	4.87E-01
$R(n_{ieq})$	8.37E-01	8.37E-01	8.35E-01	8.30E-01	8.13E-01	8.09E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.52E+12	4.80E+09	1.49E+07	6.15E+04	3.67E+05
$\eta$	1.57E+05	1.23E+13	1.06E+10	3.25E+07	1.28E+05	7.54E+05
<b>Bloque 17</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	4.87E-01	4.87E-01	4.90E-01	4.96E-01	5.20E-01	5.25E-01
$R(n_{ieq})$	8.09E-01	8.09E-01	8.07E-01	8.02E-01	7.83E-01	7.79E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.52E+12	4.80E+09	1.49E+07	6.63E+04	3.74E+05
$\eta$	1.44E+05	1.13E+13	9.80E+09	3.00E+07	1.28E+05	7.12E+05
<b>Bloque 18</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	5.25E-01	5.25E-01	5.28E-01	5.35E-01	5.59E-01	5.25E-01
$R(n_{ieq})$	7.79E-01	7.79E-01	7.77E-01	7.71E-01	7.52E-01	7.79E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.53E+12	4.80E+09	1.50E+07	7.12E+04	3.81E+05
$\eta$	1.34E+05	1.05E+13	9.09E+09	2.80E+07	1.27E+05	7.26E+05
<b>Bloque 19</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	5.25E-01	5.25E-01	5.67E-01	5.75E-01	5.99E-01	6.04E-01
$R(n_{ieq})$	7.79E-01	7.79E-01	7.45E-01	7.38E-01	7.18E-01	7.14E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.54E+12	4.80E+09	1.51E+07	7.63E+04	3.88E+05
$\eta$	1.34E+05	1.06E+13	8.47E+09	2.63E+07	1.27E+05	6.42E+05
<b>Bloque 20</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	6.04E-01	6.04E-01	6.07E-01	6.16E-01	6.39E-01	6.45E-01
$R(n_{ieq})$	7.14E-01	7.14E-01	7.11E-01	7.03E-01	6.83E-01	6.78E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.55E+12	4.80E+09	1.51E+07	8.15E+04	3.94E+00
$\eta$	1.16E+05	9.19E+12	7.91E+09	2.45E+07	1.28E+05	6.11E+00
<b>Bloque 21</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
$D$	6.45E-01	6.45E-01	6.49E-01	6.58E-01	6.81E-01	6.87E-01
$R(n_{ieq})$	6.78E-01	6.78E-01	6.75E-01	6.67E-01	6.46E-01	6.41E-01
$n_{ieq}$	7.03E+04	5.55E+12	4.80E+09	1.52E+07	8.68E+04	4.01E+05
$\eta$	1.09E+05	8.60E+12	7.40E+09	2.31E+07	1.27E+05	5.84E+05
<b>Bloque 22</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>

<b>D</b>	6.87E-01	6.87E-01	6.91E-01	7.01E-01	7.24E-01	7.30E-01
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	6.41E-01	6.41E-01	6.37E-01	6.28E-01	6.08E-01	6.02E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.56E+12	4.80E+09	1.52E+07	9.23E+04	4.07E+05
<b>η</b>	1.02E+05	8.09E+12	6.95E+09	2.17E+07	1.27E+05	5.58E+05
<b>Bloque 23</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	7.30E-01	7.30E-01	7.35E-01	7.45E-01	7.68E-01	7.74E-01
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	6.02E-01	6.02E-01	5.98E-01	5.89E-01	5.68E-01	5.62E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.57E+12	4.81E+09	1.53E+07	9.79E+04	4.13E+05
<b>η</b>	9.63E+04	7.63E+12	6.54E+09	2.05E+07	1.27E+05	5.34E+05
<b>Bloque 24</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	7.74E-01	7.74E-01	7.79E-01	7.90E-01	8.13E-01	8.20E-01
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	5.62E-01	5.62E-01	5.58E-01	5.48E-01	5.27E-01	5.21E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.51E+12	4.81E+09	1.53E+07	1.04E+05	4.19E+05
<b>η</b>	9.08E+04	7.12E+12	6.17E+09	1.94E+07	1.28E+05	5.11E+05
<b>Bloque 25</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	8.20E-01	8.20E-01	8.25E-01	8.36E-01	8.60E-01	8.66E-01
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	5.21E-01	5.21E-01	5.17E-01	5.07E-01	4.86E-01	4.80E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.58E+12	4.81E+09	1.54E+07	1.10E+05	4.25E+05
<b>η</b>	8.57E+04	6.80E+12	5.83E+09	1.84E+07	1.28E+05	4.91E+05
<b>Bloque 26</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	8.66E-01	8.66E-01	8.72E-01	8.83E-01	9.07E-01	9.14E-01
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	4.80E-01	4.80E-01	4.75E-01	4.65E-01	4.45E-01	4.39E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.59E+12	4.81E+09	1.54E+07	1.16E+05	4.31E+05
<b>η</b>	8.12E+04	6.45E+12	5.52E+09	1.74E+07	1.28E+05	4.72E+05
<b>Bloque 27</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	9.14E-01	9.14E-01	9.20E-01	9.32E-01	9.56E-01	9.63E-01
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	4.39E-01	4.39E-01	4.34E-01	4.24E-01	4.04E-01	3.98E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.59E+12	4.81E+09	1.54E+07	1.22E+05	4.36E+05
<b>η</b>	7.69E+04	6.12E+12	5.23E+09	1.65E+07	1.28E+05	4.53E+05
<b>Bloque 28</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>D5</b>	<b>D6</b>
<b>D</b>	9.63E-01	9.63E-01	9.69E-01	9.82E-01	1.01E+00	1.01E+00
<b>R(n<sub>ieq</sub>)</b>	3.98E-01	3.98E-01	3.93E-01	3.82E-01	3.60E-01	3.60E-01
<b>n<sub>ieq</sub></b>	7.03E+04	5.60E+12	4.81E+09	1.55E+07	1.28E+05	4.42E+05
<b>η</b>	7.30E+04	5.82E+12	4.96E+09	1.58E+07	1.27E+05	4.38E+05

Nota. Elaboración propia.

**Paso 18.** En la Tabla 4.18, el valor del índice de confiabilidad de cada bloque es.

**Tabla 4.18. Confiabilidad de cada bloque.**

Bloque	$R(t)$	Bloque	$R(t)$
1	0.99968	15	0.83706

2	0.99850	16	0.80903
3	0.99628	17	0.77943
4	0.99290	18	0.77943
5	0.98799	19	0.71381
6	0.98172	20	0.67811
7	0.97376	21	0.64079
8	0.96396	22	0.60212
9	0.95216	23	0.56240
10	0.93870	24	0.52108
11	0.92259	25	0.48034
12	0.90471	26	0.43879
13	0.88452	27	0.39776
14	0.86197	28	0.35999

**Paso 19.** De la Tabla 4.9, la confiabilidad del elemento analizado es  $R(t) = 0.99968$ .

### 4.3 Validación de los Objetivos.

La validación del objetivo general es como sigue: De la aplicación de los 19 pasos de la metodología desarrollada los casos 1 y 2 se concluye que la metodología es eficiente para determinar la confiabilidad del elemento mecánico analizado. La confiabilidad del elemento en el Caso 1 fue de 99.74% en el renglón uno, de 97% en el renglón tres y el índice de  $D = 1$  ocurrió en el renglón siete. La confiabilidad del elemento en el Caso 2 fue de 99.96% en el renglón uno, de 97% en el renglón siete y el índice de  $D = 1$  ocurrió en el renglón veintiocho.

La validación del primer objetivo particular se logró en los pasos 10 y 11 de la metodología desarrollada, dando una distribución Weibull del estrés para el Caso 1 de  $W(\beta_E = 1.0125, \eta_E = 41.7047)$  y una distribución Weibull del estrés para el Caso 2 de  $W(\beta_E = 0.0454, \eta_E = 68.2519)$ .

La validación del segundo objetivo particular se logró en los pasos 12 al 14 de la metodología desarrollada, dando una distribución Weibull de la resistencia para el Caso 1 de  $W(\beta_R = 6.4543, \eta_R = 165.8969)$  y una distribución Weibull de la resistencia para el Caso 2 de  $W(\beta_R = 5.3434, \eta_R = 342.1184)$ .

## 5. CONCLUSIONES

En esta sección se presentan las conclusiones que resultaron de la aplicación de la metodología desarrollada, las cuales se mencionan enseguida.

- La metodología desarrollada es eficiente para determinar los índices de confiabilidad del elemento mecánico, esto debido a la combinación de la distribución Weibull con el daño acumulado.
- Para que la metodología desarrollada sea eficiente es necesario que el análisis de daño acumulado sea representativo del medio ambiente de vibración que se está analizando. Aquí para lograr este objetivo se incorporó el efecto del tiempo, geometría, carga y resonancia. Si en algún otro caso se deberán considerar más variables estas deberán ser incluidas en la determinación del daño acumulado.
- La determinación de la distribución de estrés es representativa del ambiente de vibración ya que sus parámetros son determinados directamente del máximo y mínimo Grms del perfil de prueba utilizado.
- La determinación de la distribución de resistencia es representativa del efecto que el estrés tiene sobre el material ya que considera las propiedades del material, e incorpora el coeficiente de fatiga en la determinación del parámetro de forma.
- Esta metodología se desarrolló en base a un requerimiento del 97%, pero esta puede ser aplicada para cualquier requerimiento de confiabilidad diferente a este 97%.
- En la primera aplicación denominada Caso 1, se encontró de la Tabla 4.8, que la confiabilidad del elemento dada en el bloque uno fue de 99.74% y que la confiabilidad límite aceptada del 97% ocurrió en bloque tres. También es importante mencionar que el índice de  $D = 1$  ocurrió en el séptimo bloque.
- En la segunda aplicación denominada Caso 2, se encontró que la confiabilidad del elemento dada en el bloque uno fue de 99.96% y que la confiabilidad límite aceptada del 97% ocurrió en bloque siete. También es importante mencionar que el índice de  $D = 1$  ocurrió en el veintiochoavo bloque.

## BIBLIOGRAFÍA

- Baro-Tijerina, M. (2020). “*Metodología Estrés-Resistencia Weibull con Parámetro de Forma Diferente.*”
- Barraza, J. M. (2022). *Metodología para la Acumulación del Daño por Fatiga Provocado por Vibración Aleatoria*. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
- Barraza, J. M., Piña, M. R., Molina, A., & Torres, R. C. (2022). Random Vibration Fatigue Analysis Using a Nonlinear Cumulative Damage Model. *Applied Sciences* 2022, Vol. 12, Page 4310, 12(9), 4310. <https://doi.org/10.3390/APP12094310>
- Barraza-Contreras, J. M., Piña-Monarez, M. R., & Molina, A. (2020a). Fatigue-life prediction of mechanical element by using the Weibull distribution. *Applied Sciences (Switzerland)*, 10(18). <https://doi.org/10.3390/APP10186384>
- Barraza-Contreras, J. M., Piña-Monarez, M. R., & Molina, A. (2020b). Fatigue-life prediction of mechanical element by using the Weibull distribution. *Applied Sciences (Switzerland)*, 10(18). <https://doi.org/10.3390/APP10186384>
- Barraza-Contreras, J. M., Piña-Monarez, M. R., Molina, A., & Torres-Villaseñor, R. C. (2022). Random Vibration Fatigue Analysis Using a Nonlinear Cumulative Damage Model. *Applied Sciences (Switzerland)*, 12(9). <https://doi.org/10.3390/app12094310>
- Beer, F. P., Johnston Jr., E. R., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros, Dinámica* (Novena). McGraw-Hil.
- Bruel, H., & Kjaer Inc. (2025). *Inverse Power Law Relationship*. [https://help.reliasoft.com/reference/accelerated\\_life\\_testing\\_data\\_analysis/alt/inverse\\_power\\_law\\_relationship.html](https://help.reliasoft.com/reference/accelerated_life_testing_data_analysis/alt/inverse_power_law_relationship.html)

- Budynas, R. G., & Keith Nisbett, J. (2015). *Shigley's Mechanical Engineering Design*.
- Castillo, E., & Fernández-Canteli, A. (2009). *A Unified Statistical Methodology for Modeling Fatigue Damage*.
- Gutiérrez Pulido, H., & De la Vara Salazar, R. (2013). *Control estadístico de la calidad y Seis Sigma* (Tercera ed). Mc Graw Hill Education.
- Harris, C. M., & Piersol, A. G. (2002a). *Harris' shock and vibration handbook* (5th ed.). McGraw-Hill.
- Harris, C. M., & Piersol, A. G. (2002b). *Shock and vibration handbook*. McGraw-Hill.
- Hectors, K., & De Waele, W. (2021). Cumulative damage and life prediction models for high-cycle fatigue of metals: A review. *Metals*, *11*(2), 1–32.  
<https://doi.org/10.3390/met11020204>
- Hernández Ramos, M. M., Piña Monarrez, M. R., Barraza Contreras, J. M., & Monclova Quintana, O. (2025). Weibull Reliability Methodology based on Cumulated Vibration Damage. *Eksploatacja i Niezawodnosc*, *27*(3). <https://doi.org/10.17531/ein/201990>
- Inverse Power Law Relationship*. (n.d.). Retrieved March 17, 2026, from [https://help.reliasoft.com/reference/accelerated\\_life\\_testing\\_data\\_analysis/alt/inverse\\_power\\_law\\_relationship.html](https://help.reliasoft.com/reference/accelerated_life_testing_data_analysis/alt/inverse_power_law_relationship.html)
- Kelly, S. G. (2012). *Mechanical Vibrations Theory and Applications* (SI Edition). Cengage Learning.
- Kumar, S. M. (2008). Analyzing Random Vibration Fatigue. *ANSYS Advantage*, *II*(3), 39–42.  
[www.ansys.com](http://www.ansys.com)
- Lee, Y.-L., Pan, J., Hathaway, R., & Barker, M. (2005). *Fatigue Testing and Analysis*.

- Lee, Y.-L., Pan, J., Hathaway, R., & Barkey, M. (2013). Fatigue testing and Analysis. In *Wood Science and Technology* (Vol. 192, Number 3).
- Martínez Batista, R., Pino Tarragó, J. C., Terán Herrera, H. C., & Arteaga López, O. B. (2017). *Vibraciones Mecánicas Volumen I* (Vol. 1).
- Miner, M. A. (1945). Cumulative Damage in Fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3), A159–A164. <https://doi.org/10.1115/1.4009458>
- Piña-Monarez, M. R. (2019). Weibull analysis for normal/accelerated and fatigue random vibration test. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(7), 2408–2428. <https://doi.org/10.1002/qre.2532>
- Rao, S. S. (2018). *Mechanical Vibrations* (Sixth edit). Pearson Education, Inc.
- ReliaSoft. (2003). *Topics A Look Under the Hood at the Cumulative Damage Model*.
- ReliaSoft. (2016). *Two Methods for Analyzing Time-Varying Stress Data in ALTA*.
- Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. Taylor & Francis Group, LLc.
- Santecchia, E., Hamouda, A. M. S., Musharavati, F., Zalnezhad, E., Cabibbo, M., El Mehtedi, M., & Spigarelli, S. (2016). A Review on Fatigue Life Prediction Methods for Metals. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/9573524>
- Schmitz, T. L., & Smith, K. S. (2012). *Mechanical Vibrations, modeling and measurement*.
- Steinberg, D. S. (2000). *Vibration analysis for electronic equipment*. John Wiley & Sons.
- Weibull, W. (1939). *A Statistical theory of the strength of materials*. 1–45.
- White, G. (2010). *Introducción al Análisis de Vibraciones*. Azima DLI.

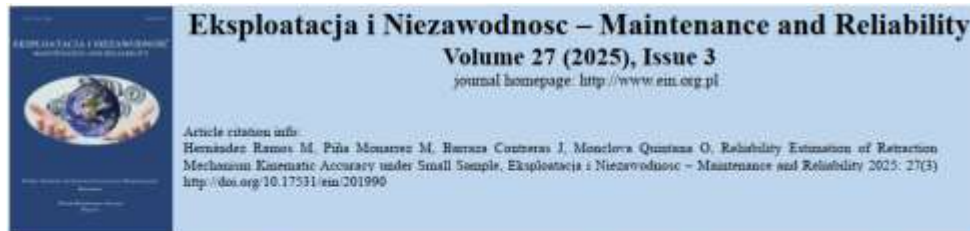
Xu, X., Li, Y., Huang, W., Chen, D., Zhang, C., & Shi, W. (2021). Fatigue design of steel bridge deck asphalt pavement based on nonlinear damage accumulation theory. *Applied Sciences (Switzerland)*, *11*(12). <https://doi.org/10.3390/app11125668>

# Apéndices

## Apéndice A: Participación en congreso



## Apéndice B: Artículos publicados en revistas JCR



### Weibull Reliability Methodology based on Cumulated Vibration Damage



María Magdalena Hernández Ramos<sup>a</sup>, Manuel Román Piña Monarrez<sup>a\*</sup>, Jesús Manuel Barraza Contreras<sup>a</sup>, Osvaldo Monclova Quintana<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Industrial and Manufacturing Department at the Engineering and Technological Institute, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México

#### Highlights

- We determine the reliability index of each damage element  $D_i$  and damage block  $B_i$ .
- We determined the Weibull shape and scale parameters for each  $D_i$  and  $B_i$  element.
- The estimated shape parameter represents the spread of the cumulated damage until  $D=1$ .
- Fatigue vibration damage is cumulated by using a nonlinear model for AL6061-T6.
- The only input of the reliability methodology is the data from the cumulated damage analysis.




#### Abstract

In the paper, the formulated Weibull vibration reliability methodology is based on the cumulative vibration damage analysis. It lets us determine the reliability index of each damage element, each damage block, and the reliability of the analyzed element. Vibration damage is cumulated until  $D = 1$ , by using the addressed vibration stress and a nonlinear cumulative damage model. Based on static and modal analysis, the vibration stress is determined by incorporating to it, the geometry, weight and resonance effects. In the reliability analysis the Weibull shape ( $\beta$ ) parameter is determined directly from the number of damage blocks, for which  $D = 1$ . The damage element, damage block, and element reliability are all determined based on the beta ( $\beta$ ) value and  $D_i$  elements. Finally, based on the cumulated applied cycles  $n_i$ , the Weibull scale ( $\eta_i$ ) parameter is determined by each  $D_i$  elements, damage block,



#### Article

## Weibull Reliability Based on Random Vibration Performance for Fiber Optic Connectors

Jesús M. Barraza-Contreras , Manuel R. Piña-Monarrez , María M. Hernández-Ramos   
and Secundino Ramos-Lozano

Industrial and Manufacturing Department, Engineering and Technological Institute, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua 32310, Mexico; [jesus.barraza@uacj.mx](mailto:jesus.barraza@uacj.mx) (J.M.B.-C.); [magdalena.hernandez@uacj.mx](mailto:magdalena.hernandez@uacj.mx) (M.M.H.-R.); [secundino.ramos@uacj.mx](mailto:secundino.ramos@uacj.mx) (S.R.-L.)


\* Correspondence: [manuel.pina@uacj.mx](mailto:manuel.pina@uacj.mx); Tel.: +52-656-330-1229

#### Abstract

Communication via optical fiber is increasingly being used in harsh applications where environmental vibration is present. This study involves a Weibull reliability analysis focused on the performance of fiber optic connectors when they are subjected to mechanical random vibration stress to simulate real-world operating conditions, and the insertion loss (IL) degradation is measurable. By analyzing the testing times and stress levels, the Weibull shape ( $\beta$ ) and scale ( $\eta$ ) parameters are estimated directly from the maximal and minimal principal IL stresses ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ), enabling the prediction of the connector's reliability with efficiency. The sample size  $n$  is derived from the desired reliability ( $R(t)$ ), and the GR-326 mechanical vibration test (2.306 Grms for six hours) is performed on optical SC angled physical contact (PC) polish fiber endface connectors that are monitored during testing to evaluate the IL transient change in the optical transmission. The method is verified by

Article

## Methodology to Determine the Stress Distribution Based on Fatigue Data with Bilinear Behavior and Its P–S–N Field and Testing Plan

Oswaldo Monclova-Quintana <sup>1</sup>, Manuel R. Piña-Monarez <sup>1,\*</sup>, María M. Hernández-Ramos <sup>1</sup>  
and Jesús F. Ortiz-Yáñez <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Engineering and Technological Institute, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Ciudad Juárez 32540, Mexico; al228139@alumnos.uacj.mx (O.M.-Q.); magdalena.hernandez@uacj.mx (M.M.H.-R.)



<sup>2</sup> Reliability Engineering Lab, TED DE MEXICO SA DE CV, Ciudad Juárez 32470, Mexico; jesus.ortiz@stoneridge.com

\* Correspondence: manuel.pina@uacj.mx; Tel.: +52-656-688-4843

**Abstract:** In this paper, based on the Weibull Inverse Power Law, we present a methodology to determine the following: (1) the failure percentiles, referred to as the P–S–N field, of an S–N curve for a 42CrMo4 steel material exhibiting bilinear ( $s_1$  and  $s_2$ ) behavior (e.g., a competence failure mode); (2) the Weibull family that characterizes the entire bilinear behavior; and (3) the zero-vibration test plan that meets the required vibration reliability index of  $R(t) = 0.97$  with a reliability confidence level of  $CL = 0.75$ . From the application, based on the formulated normal–Weibull relationship, we determine the failure percentiles for the normal (one, two, and three) sigma levels, as well as those failure percentiles corresponding to the capability ( $C_p$ ) and ability ( $C_{pk}$ ) indices. Finally, we present the formulation to determine the  $R(t)$  index and the  $CL$  level associated with each normal percentile, along with their numerical values.

Article

## Acceleration of Service Life Testing by Using Weibull Distribution on Fiber Optical Connectors

Jesús M. Barraza-Contreras , Manuel R. Piña-Monarez <sup>\*</sup>, María M. Hernández-Ramos,  
Oswaldo Monclova-Quintana and Secundino Ramos-Lozano

Industrial and Manufacturing Department, Engineering and Technological Institute, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua 32310, Mexico; jesus.barraza@uacj.mx (J.M.B.-C.);

magdalena.hernandez@uacj.mx (M.M.H.-R.); al228139@alumnos.uacj.mx (O.M.-Q.);

secundino.ramos@uacj.mx (S.R.-L.)

\* Correspondence: manuel.pina@uacj.mx; Tel.: +52-656-330-1229

**Abstract:** The service life assessment of previous fatigue stress has a fundamental role in estimating the reliability of products like fiber optical connectors, and should replicate use in severe environments in telecommunications systems. However, the vibration prediction models used in the literature present limitations in vibration life prediction. In this paper, we propose using the insertion loss fatigue life and including it in the Weibull distribution to determine the Weibull parameters  $\eta$  and  $\beta$  to evaluate fiber optic connector reliability  $R(t)$  under environmental and mechanical testing stress. We analyzed the failure data of a standard telecommunication fiber optical connector under a program of service life stress testing against that of a fiber optical connector under only mechanical vibration stress testing. The fiber connectors were monitored during the vibration testing to review the transient change of the optical signal. Their results showed that the reliability of the fiber connectors submitted to the service life program was  $R(t) = 0.694$ , while that of the fiber connectors submitted

## Apéndice C: Estancia de investigación



Av. Antonio J. Bermúdez no. 550  
Parque Industrial Bermúdez  
Cd. Juárez, Chih. C.P 32470  
Tel Mex. +52 (656) 692 7800  
US Phone 575-874 5100  
Fax +52 (656) 692 7812

Ciudad Juárez Chih. 25 de Junio 2025

A QUIEN CORRESPONDA,

Por medio de la presente se hace constar que la C. María Magdalena Hernández Ramos (matrícula 230031), realizó y finalizó la estancia de investigación "Metodología de confiabilidad para incorporar el daño acumulado por vibración en elementos mecánicos al análisis Weibull"; se realizó prueba mecánica de vibración en el periodo de mayo-junio del 2025 en la empresa Commscope.

Los beneficios obtenidos fueron:

- Desarrollo del análisis Weibull.
- Demostración del daño mecánico generado por los esfuerzos de vibración.
- Entrega del resultado del cálculo de la confiabilidad en base al daño mecánico.

En este proyecto participé: por parte de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ) el Dr. Manuel Román Piña Monarrez, quien fungió como asesor académico. Por parte de Commscope (ADC de Juárez) el Dr. Jesús Manuel Barraza Contreras (Ing. De Laboratorio) y el M.C Luis Armando Cedillo (Gerente del laboratorio de validación), quienes fungieron como tutores de planta.

Se extiende el presente documento para los fines que al interesado convenga en Ciudad Juárez, Chihuahua.



Luis Armando Cedillo

ADC de Juárez, S de R.L de C.V

R.F.C A318001833-PFA Reg. Patronal IMSS: A83-91616-10-0 Reg. INMEX 3572-2006