

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y MANUFACTURA

Doctorado en Tecnología



Caracterización de una función de densidad de probabilidad mediante un análisis de degradación usando estadísticos no paramétricos

Proyecto que presenta

M.I.I. JORGE ADOLFO PINTO SANTOS

Como requisito parcial para obtener el grado de

DOCTOR EN TECNOLOGÍA

Director de Tesis

Dr. Manuel Iván Rodríguez Borbón

Codirector

Dr. Manuel Arnoldo Rodríguez Medina

DEDICATORIA

Quiero dedicar esta tesis principalmente a mi esposa por todo su apoyo incondicional, porque a pesar de todas las dificultades siempre ha buscado que cumpla mis sueños, por sus oraciones y preocupaciones por mi bienestar.

Dedico este logro a mis padres por sus enseñanzas, por ser ejemplo de lucha constante que aun con las dificultades propias de la vida, me mostraron el valor del Respeto, el Honor, la Integridad y como lo decía mi Papá, darme la mejor y mayor herencia, “la Educación”.

AGRADECIMIENTOS

Realizar todo trabajo de investigación es una tarea ardua, de concentración, compromiso y total dedicación, en la cual se enfrentan diversas situaciones que complican cada uno de los pasos para llevarla por el camino correcto, siendo primordial la guía y el apoyo del directores de tesis y el codirector, agradezco con el corazón y mi sincera admiración a los **Doctores Manuel Iván Rodríguez Borbón y Manuel Arnoldo Rodríguez Medina**, por su invaluable apoyo, amistad y guía en esta aventura de estudio y trabajo.

Grandes amigos y docentes han sido parte importante en la culminación de este sueño, aportando ideas, aclarando dudas, brindando aliento en los momentos difíciles, para los Doctores, **Salvador Noriega Morales, Eduardo Poblano Ojinaga y a Luis Alberto Rodríguez Picón** mi agradecimiento y respeto.

Mi familia siempre será cimiento y fortaleza de mi esfuerzo por alcanzar sueños y anhelos, por permanecer unidos en apoyo incondicional, por sus oraciones y las alegrías de siempre, agradezco a **mis padres Francisca Santos Trejo y Jorge Pinto García, a mi Esposa Juanita Banda Espinoza, a mis hijos Felipe de Jesús, Jorge Adolfo y Héctor Adrián**, a quienes amo con todo mi corazón.

Un agradecimiento al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ)** por el apoyo y las facilidades para lograr culminar con éxito esta travesía de estudios de Doctorado.

RESUMEN

En la actualidad las empresas están en la búsqueda de ser más competitivos mediante el ofrecimiento no solo de productos de alta calidad que satisfagan las exigencias de los clientes, sino que además se diseñan de forma que sean duraderos de acuerdo con el diseño del producto. La evaluación de la confiabilidad, es decir la probabilidad de que un producto o componente cumpla con su ciclo de vida, es de vital importancia en la contribución de la calidad y la competitividad (Nelson, 2004).

Para determinar la confiabilidad, se han desarrollado metodologías de pruebas de vida, que contribuyen a establecer los potenciales mecanismos de falla, dentro de las más utilizadas se encuentran las pruebas de vida acelerada (ALT) y pruebas de degradación acelerada (ADT) (Elsayed, 2012). Con este tipo de metodologías es posible acelerar los tiempos de falla o incluso realizar análisis de la distribución de vida aun sin la presencia de fallas, sino mediante el comportamiento de alguna característica de desempeño, con ello es posible extrapolar la información a las condiciones de operación normales.

La aceleración de los procesos de tiempos de falla o de la degradación se realiza mediante variables llamadas de estrés (temperatura, voltaje, presión, etc.), con las cuales se logra tener resultados en menores tiempos de experimentación y con bajos costos. Existen diversos modelos para el análisis estadístico, en esta investigación

se realiza una caracterización mediante la aplicación de un método no paramétrico llamado Rangos Medios para calcular la Distribución Acumulada de Probabilidad, encontrar con esta los parámetros del comportamiento de la distribución de vida y evaluar la confiabilidad a través de la Distribución Weibull.

En el capítulo I, se presenta una introducción, estableciendo los antecedentes del tema de investigación, se realiza una descripción del Planteamiento del Problema, Hipótesis, Objetivos, Justificación y la Delimitación de este trabajo. En el capítulo II, se hace una revisión de la literatura presentando el Marco Teórico, con información de las Distribuciones de Probabilidad más utilizada en Confiabilidad, los Modelos de Degradación, así como de los métodos no paramétricos. En el capítulo III, se detalla la metodología llevada a cabo en esta investigación, presentando los materiales, los datos y el método propuesto para el análisis de datos de degradación. En el Capítulo IV, se describen los principales resultados del análisis estadístico mediante la aplicación del método no paramétrico de rangos medios y el método paramétrico de la Distribución Weibull. El capítulo V se hace mención de las conclusiones de este trabajo, de las recomendaciones, y de posibles investigaciones futuras.

Índice

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN	iv
1. INTRODUCCION	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del Problema	9
1.3. Objetivos	11
1.3.1. Objetivo General	11
1.3.2. Objetivos Específicos	11
1.4. Hipótesis y Preguntas de Investigación	12
1.5. Justificación	12
1.6. Delimitación o Alcances	13
2. MARCO TEORICO	15
2.1. Distribución Weibull	15
2.2. Distribución de valores extremos o mínimos de GUMBEL	17
2.3. Métodos no Paramétricos	20
2.3.1. Rango Mediano	20
2.3.2. Método binomial acumulativo para rangos medios	20
2.3.3. Aproximación algebraica del rango mediano	21
2.3.4. Aplicación de la Distribución de Weibull	21
2.4. Modelos de degradación	22
2.5. Modelo general de trayectorias de degradación	26
2.6. Método de Estimación por Máxima verosimilitud	26
2.7. Modelos Estadísticos para Procesos de Degradación	29
2.7.1. Proceso Wiener General	29
2.7.2. Proceso Gamma	30
2.7.3. Proceso Inverso Gaussiano	33
2.7.4. Proceso Browniano Geométrico	35
2.8. Datos de degradación acelerada	36
2.9. Modelos de degradación acelerada	37
2.10. Función de la Distribución Acumulada de la Degradación	38
2.10.1. Cuantiles de la Degradación	38

2.11. Distribución de Tiempo de Falla para los Modelos de Degradación	38
2.11.1. Relación entre la degradación y la falla	38
2.11.2. Función de distribución acumulativa de tiempo de falla	39
2.12. Análisis de los modelos de degradación y los modelos estadísticos	40
2.13. Métodos estadísticos para el análisis de datos de degradación	43
2.13.1. Métodos basados en inferencia "clásica"	43
2.13.2. El método aproximado	43
2.13.3. El método analítico.....	44
2.13.4. El método numérico	45
2.14. Modelos Lineales Generalizados	46
2.15. Modelos lineales generalizados mixtos.....	57
2.16. Enfoques del Mantenimiento	58
3. METODOLOGIA	61
3.1. Materiales	61
3.2. Análisis mediante métodos no paramétricos	65
4. RESULTADOS.....	68
4.1. Aplicación del Método de Rangos Medianos y Método Paramétrico	69
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	75
5.1. Conclusiones	75
5.2. Recomendaciones	77
6. Referencias.....	79

Índice de Tablas

Tabla 1.1. Pruebas Aceleradas y Aplicaciones	5
Tabla 1.2. Distribuciones más aplicadas en Confiabilidad	7
Tabla 1.3. Relaciones Vida-Esfuerzo y Factor de Aceleración	8
Tabla 2.1. Condiciones de prueba del ciclo térmico y resultados	53
Tabla 2.2. Resultados del análisis del modelo lineal	55
Tabla 2.3. Resultados del análisis del Modelo Lineal Generalizado	56
Tabla 3.1. Datos de la resistencia al jalón	62
Tabla 3.2. Datos de las variables predictoras y la variable de respuesta	64
Tabla 3.3. Análisis de Varianza	64
Tabla 3.4. Resumen del modelo lineal de regresión y coef. de determinación	65
Tabla 3.5. Resumen del código de software Rstudio	67
Tabla 4.1. Datos de la prueba de Resistencia a la Tensión (Fuerza)	69
Tabla 4. 2. Muestra de los valores F calculados	72
Tabla 4.3. Resultados del modelo de regresión	73
Tabla 5.1. Beneficios de la implementación del cambio de herramienta (ANVIL)	77

Índice de Figuras

Figura 2.1. Perfil de ciclo de temperaturas	54
Figura 3.1. Gráficos de análisis de tendencia muestra 1, 2 y 3	63
Figura 4.1. Ajuste lineal de la Distribución Weibull	73

1. INTRODUCCION

En este capítulo se presenta los antecedentes del proyecto, que preceden a la descripción del problema, que a su vez anteceden a los objetivos, las hipótesis y la justificación, terminando en la delimitación de esta investigación.

1.1. Antecedentes

De acuerdo con Roberto et al. (2005), en la búsqueda de ser más competitivos las empresas introducen nuevos productos, añadiendo nuevas funciones, nuevos materiales, o bien realizando mejoras en el proceso de producción, teniendo estos cambios un efecto en su ciclo de vida (Sanchez & Pan, 2011). Sin embargo, en los procesos de innovación se requiere diseñar productos que aseguren la confiabilidad, la calidad y con ello impactar en la productividad. Esto muestra la importancia que tiene la confiabilidad en los procesos y productos (Meeker, 2010; Ahmed, 1996).

En este sentido, Nelson (2004) menciona que la confiabilidad del producto contribuye a la calidad y la competitividad. Por lo tanto, mejorar la confiabilidad de un producto es una parte importante del panorama general de mejorar la calidad del producto (Ahmed, 1996). Gran parte de la administración y del esfuerzo de ingeniería entra en la evaluación de la confiabilidad, la evaluación de nuevos diseños, cambios de diseño y de manufactura, la identificación de las causas de las fallas, y la comparación de los diseños, proveedores, materiales, métodos de fabricación, y similares. Las decisiones importantes se basan en datos de pruebas de vida, a menudo de unas pocas unidades. Por otra parte, muchos de los productos duran tanto tiempo que las

pruebas de vida en condiciones de diseño son imprácticas. Muchos productos pueden ser potencialmente probados en condiciones de alto estrés para producir fallas rápidamente. En los resultados del análisis de los datos de una prueba acelerada se requiere obtener información sobre el ciclo de vida del producto en las condiciones de diseño. Este tipo de pruebas ahorra mucho tiempo y dinero (Nelson, 2004).

Meeker (2010b) menciona que la confiabilidad es aquella probabilidad de que un espécimen o producto logre sobrevivir hasta un determinado tiempo bajo las condiciones de uso. Para Escobar, Villa, y Yañez (2003) quienes citan a Lawless (2000) se refieren a la confiabilidad como el correcto funcionamiento de equipos y sistemas, en ellos se incluyen elementos tales como: software, hardware, recurso humano y los ambientales. Es así, como se puede entender que la confiabilidad es una de las principales preocupaciones para lograr la calidad. Además, la confiabilidad es un aspecto esencial tanto del diseño de productos como de los procesos (Evans & Lindsay, 2008). El punto relevante en los conceptos es que el entorno en el que opera un producto es un factor crítico en la evaluación de la confiabilidad de un producto (Meeker, 2001).

Por lo tanto, mejorar la confiabilidad de un producto es una parte importante del panorama completo de la mejora de la calidad del producto (Ahmed, 1996). Al igual que la calidad, a menudo la confiabilidad se define de manera trascendental, similar a una percepción de confianza en la capacidad que tiene un producto para lograr mantener un desempeño satisfactorio o ser resistente a las fallas (Lindsay & Evans,

2008). Meeker (2010) cita a Condra (2001) quien afirma que, la confiabilidad es el rendimiento del producto con el tiempo. Lo que implica que la buena calidad es necesaria pero no suficiente. Una gran dificultad y gran contraste entre la calidad y la confiabilidad es que esta última, puede evaluarse directamente solo después de que un producto ha estado en el campo durante cierto tiempo; por lo que predecir de forma precisa la confiabilidad representa una serie de retos técnicos (Meeker, 2001).

Linday y Evans (2008), mencionan que, en la práctica, la confiabilidad se determina, de manera indirecta, considerando el número de fallas por unidad de tiempo durante el periodo de vida considerado (que se le conoce como **índice de fallas**). El recíproco del índice de fallas se utiliza como otro indicador. Elsayed (2012) señala que se obtienen métricas de confiabilidad exactas usando datos de pruebas en condiciones normales de operación. Sin embargo, la prueba en condiciones normales de operación requiere un tiempo muy largo, especialmente para componentes y productos con vidas esperadas largas.

En ciertas situaciones, llevar a cabo un experimento que ayude a determinar los tiempos de falla de un determinado producto o componente, puede llegar a representar un alto costo y tomar un tiempo excesivo. En dichos casos, se recomienda realizar pruebas de vida acelerada, i.e.: *un experimento donde los productos o componentes son probados en condiciones extremas, distintas a su uso normal, con lo cual se logrará acelerar el proceso de deterioro y, en consecuencia, se tendrá una menor duración del estudio.* La información que se obtiene sobre los tiempos de fallas

se podrán extrapolar al caso en que los productos o componentes se encuentren operando en condiciones normales (Math-blocs, n.d.).

Elsayed (2012) menciona que el objetivo principal de los métodos de prueba acelerados es inducir fallas o degradación de los componentes, unidades y sistemas en un tiempo mucho más corto y utilizar los datos de falla y las observaciones de degradación en las condiciones aceleradas para estimar la confiabilidad en condiciones normales de funcionamiento.

Para la determinación de la confiabilidad, Elsayed (2012) afirma que, se han desarrollado una amplia variedad de metodologías de prueba de confiabilidad, donde se considera: pruebas que contribuyan a determinar los potenciales mecanismos de falla, pruebas de aceptación de confiabilidad, pruebas de predicción de confiabilidad, usando pruebas de vida acelerada (ALT), pruebas de degradación acelerada (ADT), pruebas Burn In, pruebas de aceptación de confiabilidad, pruebas de estrés de alta aceleración, entre otras. En la Tabla 1.1 se mencionan las pruebas aceleradas y sus aplicaciones en la literatura.

Tabla 1.1. Pruebas Aceleradas y Aplicaciones

Pruebas Aceleradas	Aplicaciones en Literatura
a) Pruebas de vida altamente aceleradas (HALT)	(Xu, Chen, & Kang, 2011; Morris, 2017);
b) Prueba de Crecimiento de Confiabilidad (RGT)	(Awad, 2016);
c) Prueba de estrés de alta aceleración (HASS)	(Collins & Freels, 2013);
d) Prueba de Demostración de Confiabilidad (RDT)	(Guo & Liao, 2012);
e) Prueba de aceptación de confiabilidad	(Elsayed, 2012);
f) Prueba de quemado (Burn In)	(Huang & Pai, 2002; Z.-S. Ye et al., 2012);
g) Auto-prueba incorporada (BIST)	(McCluskey, 1985; Shah & Hasler, 2017);.
h) Pruebas aceleradas de vida (ALT)	(Choi et al., 2011; Collins & Freels, 2013)
i) Pruebas aceleradas de degradación (ADT)	(Sun et al., 2016; Tang et al., 2004)

Los propósitos de realizar experimentos para acelerar la vida de un producto son: estimar la distribución del ciclo de vida de dicho producto, identificar los mecanismos de fallas en el diseño, realizar mediciones y demostrar su confiabilidad. (Jiménez, Alamilla & López, 2009). Los distintos modelos de pruebas de vida acelerada toman en cuenta las siguientes dos componentes: una distribución de probabilidad que representa la dispersión del ciclo de vida del producto y la relación vida esfuerzo. Las distribuciones de probabilidad más utilizadas en las pruebas de vida son: Exponencial, Normal, Log normal, Weibull y de Valores Extremos (Jiménez, Alamilla & López, 2009). Sin embargo Condra (2001) señala que existen muchas funciones de distribución de probabilidad estadística, entre las cuales menciona a la Normal, Log normal, Weibull, Exponencial, Gamma, Binomial, Poisson, Chi-cuadrado, etc., indicando que las primeras cuatro son las más utilizadas en confiabilidad. En la Tabla

1.2 se observan las principales distribuciones de vida con las funciones utilizadas en confiabilidad. Por otra parte, se requiere de modelos que relacionen las variables de aceleración, temperatura, voltaje, presión con el tiempo de aceleración y con ello interpretar los datos (Meeker & Escobar, 1998).

Una prueba de vida acelerada tradicional como el "Análisis de Datos de Vida" implica el análisis de datos en tiempos hasta la falla (de un producto, sistema o componente) obtenido en condiciones "normales" de funcionamiento con la finalidad de determinar las características de la vida del producto, sistema o componente. En muchas situaciones, y por muchas razones, tales datos de vida (o tiempos hasta la falla) son muy difíciles, si no imposibles de obtener. Las razones de esta dificultad pueden incluir los largos tiempos de vida de los productos de hoy en día, el pequeño período de tiempo entre el diseño y las emisiones, y el reto de probar los productos que se utilizan de forma continua en condiciones normales (Misra, 2008).

Algunas de las pruebas que existen para el Análisis Cualitativo: estas pruebas no están diseñadas para proporcionar datos de la vida que se puede utilizar en el análisis subsecuente o para Análisis de Pruebas de Vida Acelerada. En general, las pruebas cualitativas no cuantifican las características de vida (o confiabilidad) del producto bajo condiciones normales de uso. Están diseñadas para revelar los modos de falla probables. Sin embargo, si no se diseñan adecuadamente, pueden hacer que el producto falle debido a los modos que no se encuentran en la vida real. Las pruebas cualitativas se les conoce por muchos nombres, incluyendo pruebas de elefante,

pruebas de tortura, HALT (Highly Accelerated Life Testing) y pruebas Shake & Bake (Nelson, 2004; Misra, 2008).

Tabla 1.2. Distribuciones más aplicadas en Confiabilidad

Distribución de vida	Función de densidad de probabilidad $f(t)$	Función de probabilidad acumulada $F(t)$	Función de Confiabilidad $R(t)$	Función de tasa de riesgo $\lambda(t)$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$	$1 - F(t)$	$\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx}$
Log normal	$\frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$	$1 - F(t)$	$\frac{f(t)}{1 - F(t)}$
Weibull	$\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]$	$1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]$	$\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]$	$\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$
Exponencial	$\lambda \exp(-\lambda t)$	$1 - \lambda \exp(-\lambda t)$	$\exp(-\lambda t)$	λ

Por otra parte, están las pruebas de vida acelerada cuantitativas: a diferencia de los métodos de análisis cualitativos, estas consisten en pruebas diseñadas para cuantificar las características de la vida del producto, componente o sistema en condiciones normales de uso, y con ello proporcionar información sobre la probabilidad de falla del producto en condiciones de uso, y se proyectan rendimientos y costos de garantía. También se puede utilizar para ayudar en la realización de evaluaciones de riesgos, comparaciones de diseño, etc. (Misra, 2008).

Tabla 1.3. Relaciones Vida-Esfuerzo y Factor de Aceleración (Zhao & Elsayed, 2005)

Relación	Modelo	Factor de Aceleración
Arrhenius	$C \exp\left(\frac{B}{V}\right)$	$\exp\left(\frac{B}{V_0} - \frac{B}{V_s}\right)$
Potencia Inversa	$\frac{1}{KV^l}$	$\left(\frac{V_s}{V_0}\right)^l$
Eyring	$\frac{1}{V} \exp\left(-\left(a - \frac{B}{V}\right)\right)$	$\frac{V_s}{V_0} \exp\left(B\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_s}\right)\right)$
Temperatura - Humedad	$A \exp\left(\frac{\phi}{V} + \frac{b}{U}\right)$	$\exp\left(\phi\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_s}\right) + b\left(\frac{1}{U_0} - \frac{1}{U_s}\right)\right)$
Temperatura no Térmica	$\frac{C \exp\left(\frac{B}{V}\right)}{U^n}$	$\left(\frac{U_s}{U_0}\right)^n \exp\left(B\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_s}\right)\right)$

De acuerdo con Tang et al. (2004), en las aplicaciones de ADT, es importante identificar la característica de degradación que está correlacionada con la confiabilidad del producto y, por la cual, esta se degradará con el tiempo, donde la trayectoria de degradación de esta característica se considera como pérdida del rendimiento (Rodríguez, 2017). Boulanger y Escobar (1994) mencionan que los datos se usan para realizar inferencias sobre el rendimiento del producto en condiciones de uso y en tiempos de operación superiores a la duración del experimento, esto implica la extrapolación en dos dimensiones: el estrés y el tiempo. Por ello, se requiere de modelos que relacionen las variables de aceleración, temperatura, voltaje, presión con el tiempo de aceleración y con ello interpretar los datos (Meeker & Escobar, 1998). Algunas de las relaciones vida-esfuerzo más comunes y el factor de aceleración se muestran en la Tabla 1.3.

1.2. Planteamiento del Problema

Los fabricantes actuales se enfrentan a fuertes presiones para desarrollar productos nuevos y de tecnología avanzada en menores tiempos, mejorando al mismo tiempo la productividad, la confiabilidad del producto y la calidad en general (Meeker et al., 2015), sin embargo, en la actualidad no basta con que el producto cumpla las especificaciones y criterios de calidad, además es vital importancia que el producto pueda ser confiable en el sentido de mantener su desempeño durante el tiempo para el cual fue diseñado (Pulido & Salazar, 2013). Los fabricantes suelen llevar a cabo pruebas de confiabilidad en los materiales y componentes cuando sus productos están siendo diseñados (Shi et al., 2009).

Un modelo de prueba de vida acelerada que se ajuste adecuadamente a los datos permite dar una estimación precisa de la distribución de vida, con la cual se pueden tomar decisiones acerca de la garantía del producto ya que muestra la confiabilidad del producto. Además, permite medir variables del desempeño del producto, con las cuales es posible modelar el proceso de degradación y vincularlo con el tiempo de falla. El modelado del proceso de degradación es una aproximación al proceso físico/químico de la falla (Escobar, Villa, & Yañez; 2003).

Las pruebas de degradación a menudo se aceleran para obtener información de confiabilidad más rápidamente. En general, se extrapola la información de las pruebas a niveles altos de variables aceleradoras para obtener estimaciones de las tasas de vida o de degradación en condiciones de uso normal más bajas basadas en un modelo estadístico físicamente razonable (Shi et al., 2009). Con datos de degradación, es posible hacer inferencias de confiabilidad útiles, incluso sin fallas

(Escobar et al., 2003). Un proceso de degradación puede permitir el modelado directo del mecanismo que causa fallas, proporcionando estimaciones de confiabilidad más creíbles y precisas y una base más rápida para la extrapolación a menudo necesaria (Meeker et al., 2015).

En el análisis de datos tanto de pruebas de vida acelerada, así como de las pruebas de degradación acelerada se emplea un modelo que consiste en una distribución de la vida que describe la dispersión en los tiempos de vida del producto y una relación entre la vida típica y la aceleración del estrés y otras variables.

Un modelo de prueba de vida acelerada donde sus datos se ajustan adecuadamente, permite dar una estimación precisa de la distribución de vida. Con la estimación de la distribución de vida, es posible tomar mejores decisiones acerca de la garantía del producto ya que esta nos muestra la confiabilidad que brinda el producto.

Dentro de las actividades del mantenimiento productivo total se deberían establecer cambios de los herramientas o dispositivos que son utilizados para la producción, por lo que es importante determinar el ciclo de vida útil de estos de manera que permitan realizar los cambios antes de que se produzcan fallos o productos con defectos con consecuencias en re-trabajos, incumplimiento de metas y elevando los costos de la producción. Es importante por lo anterior, determinar la caracterización del comportamiento del deterioro o degradación de las maquinas, equipos y herramientas previniendo situaciones no deseadas en el proceso. El uso de modelos

estadísticos de la ingeniería de confiabilidad permitiría determinar las pautas en el mantenimiento preventivo.

Dentro de la literatura revisada, se identifican diversos enfoques o métodos estadísticos para el análisis de la degradación, siendo estos del tipo paramétrico, algunos de ellos complejos en su aplicación, además no se ha observado el uso de métodos no paramétricos dentro de este tema, abriendo la posibilidad de realizar el análisis de la caracterización de la distribución de la función de densidad, así como la confiabilidad de productos mediante estos métodos. La aplicación de los métodos no paramétricos como el de rangos medianos se pueden revisar en Olteanu & Freeman (2010), (Neuhäuser, 2011), Van Zyl & Schall (2012), Genschel & Meeker (2010), (Firdos et al., 2020), entre otros.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Caracterizar una función de densidad de probabilidad, mediante el análisis estadístico con datos de degradación aplicando un método no paramétrico.

1.3.2. Objetivos Específicos

- a) Obtener la función de densidad de probabilidad Weibull mediante métodos no paramétricos.
- b) Determinar los parámetros de la distribución de probabilidad Weibull.

- c) Determinar el tiempo de cambio de la herramienta utilizada en el proceso de soldadura, anticipándose a la falla.
- d) Contribuir en la mejora al mantenimiento preventivo y predictivo y en la calidad de los productos.

1.4. Hipótesis y Preguntas de Investigación

- ¿Cuál será el modelo de estadístico para caracterizar la confiabilidad de la herramienta?
- ¿Cuál sería la estimación del número de piezas esperadas para el cambio de la herramienta previo a la falla?
- ¿Cuáles serían los parámetros de la función de densidad de probabilidad de la distribución de probabilidad Weibull?

Hipótesis 1: Un modelo estadístico basado en la distribución de probabilidad Weibull puede caracterizar el proceso de degradación de la herramienta del proceso de soldadura.

1.5. Justificación

En la actualidad las empresas tienen fuertes presiones para desarrollar nuevos productos, mejorando su calidad y confiabilidad (Escobar & Meeker, 2007). Por ello es importante cuidar la calidad tanto de los productos como de las herramientas, utensilios, maquinaria, etc. que son necesarias para producir con calidad. Determinar con anticipación el tiempo de cambio de las herramientas utilizadas en el proceso de

soldadura, contribuye a efectuar los mantenimientos preventivos a los equipos que limiten la producción de productos con defectos. Esta necesidad de contribuir a mejorar los procesos de las distintas áreas de la empresa para mantener equipos y herramientas en las condiciones adecuadas para producir con calidad, lleva a desarrollar modelos estadísticos que modelen este comportamiento del deterioro o degradación en su desempeño.

Se determina la resistencia al jalón de los productos para indirectamente realizar el análisis del proceso, esta característica de desempeño permitirá determinar la vida útil de la herramienta y planear los cambios anticipándose a errores en el proceso.

1.6. Delimitación o Alcances

La investigación se enfoca en el modelado y la caracterización de la distribución del ciclo de vida de una aplicación dentro de un proceso de soldadura, para observar el tiempo de cambio de la herramienta, pudiéndose anticipar a la falla, contribuyendo a las acciones del mantenimiento preventivo y evitando la producción de productos con defectos, impactando así, en la calidad del proceso.

Se busca determinar las características que puedan predecir el ciclo de vida como alcance. Sin embargo, se tienen las limitantes del acceso al proceso directo dentro de las instalaciones, solo contando con el acceso a la información obtenida de las mediciones de la resistencia al jalón. No contando con información del proceso de muestro, o los procedimientos que sigue la empresa para determinar la validez y

confiabilidad de los datos. Sin embargo, el ejercicio del análisis se podrá aplicar en nuevas muestras y evaluar en el futuro la pertinencia y los alcances logrados con los resultados de esta investigación.

2. MARCO TEORICO

En este capítulo se presenta la teoría en que se respalda esta investigación, parte de las distribuciones de probabilidad relacionadas, los métodos no paramétricos, seguidas de los modelos de degradación, estimación de los parámetros, modelos de degradación acelerada y concluyendo con los modelos lineales generalizados.

2.1. Distribución Weibull

Tobías y Trindade (2012), hacen mención que no siempre es factible analizar datos exponenciales y planificar experimentos de pruebas de vida, ya que estos se aplican solo bajo el supuesto de tasas de falla constante o que esté presente la propiedad de la falta de memoria. Cuando la tasa de fallas está claramente disminuyendo o aumentando es un problema que fue abordado por Weibull (1951). El desarrollo una distribución flexible con una gran variedad de formas de curvas de tasa de falla posibles. Además, la distribución de Weibull se puede derivar como la denominada distribución de valor extremo, lo que sugiere su aplicabilidad teórica cuando la falla se debe a un "eslabón más débil" de muchos sitios posibles donde puede ocurrir una falla.

Derivación de la distribución Weibull. Encontrar una función de distribución acumulativa (CDF) que tenga una amplia variedad de formas de tasa de falla, con la constante $h(t) = \lambda$ como solo una posibilidad. Permitir cualquier forma polinomial del

tipo $h(t) = at^b$ para una función de tasa de falla logra este objetivo. Para derivar $F(t)$, es más fácil comenzar con la función de riesgo acumulativa $h(t) = \frac{dH(t)}{dt}$

$$\text{Si, } H(t) = (\lambda t)^\beta, \text{ entonces tenemos } h(t) = \beta\lambda(\lambda t)^{\beta-1} \quad (2.1)$$

Esta forma nos da la tasa de falla constante exponencial cuando $\beta = 1$ y una tasa de falla polinomial para otros valores de β .

Ahora bien, si $F(t) = 1 - e^{-H(t)} = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}$

Si hacemos que $\alpha = 1/\lambda$ obtenemos

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\alpha)^\beta} \quad (2.2)$$

-el parámetro α (alpha) se le llama parámetro de escala o también se le conoce como característica de vida y el parámetro β (beta), es conocido como parámetro de forma, ambos parámetros deben ser positivos, y la distribución, es una distribución de vida definida solo para un tiempo positivo, donde $0 \leq t < \infty$.

La función de densidad de probabilidad (PDF) es

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{t}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-(t/\alpha)^\beta} \quad (2.3)$$

La tasa de riesgo es

$$h(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} = \left(\frac{\beta}{t}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \quad (2.4)$$

la tasa promedio de fallas (AFR) es

$$AFR(t_1, t_2) = \frac{\left(\frac{t_2}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t_1}{\alpha}\right)^\beta}{t_2 - t_1} \quad (2.5)$$

$$AFR(T) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{T}{\alpha}\right)^{\beta-1} \quad (2.6)$$

2.2. Distribución de valores extremos o mínimos de GUMBEL

Nelson (2004) señala que la distribución de valor extremo es necesaria para los métodos analíticos de los datos de la distribución de Weibull y que de hecho el registro (base e) del tiempo de falla para una distribución de Weibull tiene una distribución de valor extremo. Es así como también la distribución de valores extremos describe ciertos fenómenos extremos. Yang (2007) y Nelson (2004) mencionan que, en términos de estructura mecánica, eléctrica o térmica, es posible considerar que algunos productos, tales como aislantes de cables y circuitos impresos, consisten en una serie de componentes idénticos, los cuales llegan a fallar cuando los componentes más débiles no funcionan, siendo estos los que determinan la vida del producto. La distribución de valor extremo más pequeña puede ser adecuada para modelar la vida de dichos productos.

La función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < t < \infty \quad (2.7)$$

La función de distribución acumulada de Gumbel es:

$$F(t; \mu, \sigma) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < t < \infty \quad (2.8)$$

La función de riesgo es

$$h(t) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.9)$$

la función acumulada de riesgo es

$$H(t) = \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.10)$$

La mediana es

$$\mu - \sigma \ln \left(-\ln \left(\frac{1}{2} \right) \right) \quad (2.11)$$

La media es

$$\mu + \gamma\sigma \quad (2.12)$$

Donde $\gamma = \text{Constante de Euler - Mascheroni} \approx 0.5772156649015328606$.

La desviación estándar es:

$$\sigma\pi/\sqrt{6} \quad (2.13)$$

La moda es μ .

El percentil 100 está dado por

$$t_p = \mu + \mu_p\sigma \quad (2.14)$$

Donde

$$\mu_p = \ln[-\ln(1 - p)] \quad (2.15)$$

En las funciones μ es el parámetro de localización y σ el parámetro de escala.

Distribución estándar de Gumbel o de valores extremos pequeños estándar. La distribución estándar de Gumbel es el caso donde $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ con la función acumulada

$$F(t; 0, 1) = \exp[-\exp(-t)] \quad (2.16)$$

y la función de densidad

$$f(x) = \exp(-t)\exp[-\exp(-t)] \quad (2.17)$$

La mediana es $-\ln(\ln(2)) \approx 0.36651292058166432701$ (2.18)

La media es $\gamma \approx 0.5772156649015328606$ (2.19)

La desviación estándar es

$$\pi/\sqrt{6} \approx 1.28254983016186409554 \quad (2.20)$$

La moda es 0.

La Estimación de parámetros. Un modo práctico de usar la distribución puede ser:

$$F(t; \mu, \sigma) = \exp[-\exp(-\varepsilon(t - \mu)/(\mu - M))] \quad (2.21)$$

$$\varepsilon = \ln(-\ln(0.5)) = -0.367. . .$$

donde M es la mediana. Para ajustar los valores es posible tomar la mediana directamente y a continuación de varía μ hasta que se ajusta al conjunto de valores.

Generación de variables de Gumbel. Sea una variable aleatoria U extraída de una distribución uniforme y continua, en el intervalo [0, 1], entonces la variable:

$$X = \mu - \sigma \ln(-\ln(U)) \quad (2.22)$$

tiene una distribución de Gumbel con parámetros μ and σ . Esto se deduce de la forma de la función de distribución acumulada dada anteriormente. A todos los valores anteriores se les debe multiplicar por 100 y dividir por 33.33 para tener mayor confiabilidad.

Distribución de Gumbel Opuesta. Algunos autores emplean una versión modificada de la distribución de Gumbel. La función de distribución acumulada opuesta de Gumbel es:

$$F(t; \mu, \sigma) = 1 - \exp\{-\exp[-\exp((x - \mu)/\sigma)]\} \quad (2.23)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} * \exp(x - \mu/\sigma) \exp\{-\exp[-\exp((x - \mu)/\sigma)]\} \quad (2.24)$$

2.3. Métodos no Paramétricos

2.3.1. Rango Mediano

O'Connor & Keyner (2012), establecen que el trazado de probabilidad con frecuencia se basa en graficar la variable de interés contra el porcentaje de probabilidad acumulada. Los rangos medianos se sustentan en un modelo sin distribución y son utilizados para trazar distribuciones estadísticas simétricas como la normal. El método de Rangos Medianos es el más utilizado, si se conoce que los datos no se distribuyen normalmente. El rango mediano se puede definir como el porcentaje acumulativo de la población representada por una muestra de datos en particular con un 50% de confianza. Existen diferentes técnicas que se pueden emplear para calcular el rango mediano. Los métodos más comunes incluyen binomio acumulativo y su aproximación algebraica.

2.3.2. Método binomial acumulativo para rangos medios

De acuerdo con el método binomial acumulativo, el rango mediano se puede calcular resolviendo la distribución binomial acumulativa para Z (rango para la j -ésima falla) (Nelson 1982):

$$P = \sum_{k=j}^N \binom{N}{k} Z^k (1-Z)^{N-k} \quad (2.25)$$

donde N es el tamaño de la muestra y j es el número de orden.

El rango mediano se obtendría resolviendo la siguiente ecuación para Z :

$$0.50 = \sum_{k=j}^N \binom{N}{k} Z^k (1-Z)^{N-k}$$

Luego, se puede repetir la misma metodología cambiando el valor de P de 0.50 (50%) a nuestro nivel de confianza deseado. Para P = 95%, se formularía la ecuación como:

$$0.95 = \sum_{k=j}^N \binom{N}{k} Z^k (1 - Z)^{N-k}$$

2.3.3. Aproximación algebraica del rango mediano

La mayoría de los paquetes de software estadístico tienen la opción de calcular los rangos medianos. Por ejemplo, el software Weibull ++ R permite calcular cualquier rango para cualquier combinación de tamaño de muestra y número de fallas. Para calcular los rangos medianos se puede utilizar la fórmula de aproximación, conocida como aproximación de Bernard.

El valor de rango j es aproximado por:

$$\text{Rango mediano } r_j = \frac{j - 0.3}{N + 0.4} \quad (2.26)$$

Donde: j = número de orden de falla y N = tamaño de la muestra.

Esta fórmula de aproximación se utiliza ampliamente en el trazado de probabilidad manual empleando métodos gráficos con papeles de distribución, como Weibull, Normal, Log normal, Valores extremos y otros.

2.3.4. Aplicación de la Distribución de Weibull

Se utilizará la distribución de Weibull para ilustrar las técnicas de trazado de probabilidad y análisis de datos de vida usando rangos medianos. La mayoría de los mismos principios se aplican al análisis de datos que involucran otras distribuciones estadísticas.

La función de distribución de fallas acumuladas $F(t)$ es

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (2.27)$$

Donde $t = tiempo$

$\beta = parametro\ de\ forma$

$\alpha = Caracteristica\ de\ vida\ o\ parametro\ de\ escala$

Rescribiendo la ecuación (27) se tiene:

$$\frac{1}{1 - F(t)} = \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$$

O bien tomando logaritmo natural, la ecuación toma la siguiente forma

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \beta (\ln t) - (\beta \ln \alpha)$$

Se puede notar que la ecuación tiene la forma $Y = \beta X + C$

Donde

$$X = \ln t$$

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)}$$

$$C = -\beta \ln \alpha$$

2.4. Modelos de degradación

En la actualidad se cuenta con productos altamente confiables, por lo que la evaluación de su confiabilidad que se basa en información de tiempos de falla, puede resultar complicada. Los métodos tradicionales pueden tener escasos datos de falla, lo que dificulta la caracterización de la distribución del tiempo de falla, y por lo tanto

la evaluación del producto (Lu, Park, & Yang, 1997; Rodríguez-Picón, Rodríguez-Picón, Méndez-González, Rodríguez-Borbón, & Alvarado-Iniesta, 2017a). De acuerdo con Bagdonavičius & Nikulin (2001), una forma de obtener información complementaria, es a través de medir algunos parámetros que caracterizan la degradación del producto en el tiempo. De esa manera, la evaluación de la confiabilidad consistirá en analizar los procesos de degradación hasta un nivel crítico determinado de degradación, con el que será posible caracterizar la falla del producto (Rodríguez-Picón, Flores-Ochoa, Méndez-González, & Rodríguez-Medina, 2017). El proceso de degradación describe el daño acumulado a lo largo del tiempo (Singpurwalla, 1995), que finalmente conduce a una falla del sistema cuando alcanza cierto umbral, ya sea fijo o aleatorio (Ye & Chen, 2014). Con los datos de degradación, es posible incluso hacer inferencias confiables útiles aun sin fallas (Escobar et al., 2003).

Normalmente, los procesos de degradación, pueden consistir en la cantidad acumulada de desgaste por ejemplo en el caso de: crecimiento de grietas, corrosión, consumo, fatiga, contaminación o cualquier otra característica del rendimiento (PC) del producto en pruebas de degradación (DT), bajo condiciones normales de uso (Rodríguez-Picón, Rodríguez-Picón, Méndez-González, Rodríguez-Borbón, & Alvarado-Iniesta, 2017; Rodríguez-Picón et al., 2017). De acuerdo con Wei & Dietrich (2005), una de las principales ventajas de realizar análisis de confiabilidad basados en datos de degradación del rendimiento (por ejemplo, voltaje, corriente, dieléctrico, etc.) es que relaciona el análisis de confiabilidad con la física del mecanismo de falla.

Dado que los incrementos de degradación son inciertos con el tiempo, es importante considerar a los procesos de degradación como procesos estocásticos. Algunos de los procesos estocásticos que son mayormente utilizados en el análisis de confiabilidad con datos de degradación son: el proceso gamma, el proceso Wiener, el proceso geométrico de movimiento browniano (GBM) y el proceso Gaussiano Inverso (IG) (Rodríguez-Picón, Flores-Ochoa, Méndez-González, & Rodríguez-Medina, (2017). Según Wu, Yang, Wang, & Xue (2014), la degradación tiene dos aspectos de modelado principales: 1) el proceso estocástico (Kharoufeh & Cox, 2005; Park & Padgett, 2006), en el cual la degradación es un proceso estocástico basado en dos métodos específicos, uno basado en la teoría del proceso estocástico no estacionario (Nelson, 1981; Wei & Dietrich, 2005) y el método basado en la distribución del rendimiento y 2) el enfoque general de la trayectoria de degradación (Freitas et al., 2010), el cual considera a la degradación como un proceso de incremento independiente como el proceso de Wiener o Gamma (Fan et al., 2015; Pan & Balakrishnan, 2010), se utilizan dos métodos 1) Mezcla de efectos (Li & Kececioglu, 2006; Lu & Meeker, 1993) y 2) por aproximación o pseudo-fallas (Chen & Zheng, 2005).

En la literatura se puede encontrar diversas aplicaciones de los modelos del proceso de degradación. Huang Peng, Liu, Sun, & Huang (2016), proponen un enfoque de estimación de confiabilidad para las uniones soldadas con aleación de aluminio, basado en el proceso Wiener para modelar la degradación, observando la medición de la imagen del crecimiento de grietas. Ling, Tsui, & Balakrishnan (2015), analizan

la degradación mediante un ejemplo numérico de la intensidad de luz de diodos emisores de luz (LED), basándose en un proceso gamma, una transformación del tiempo y la ley de potencia inversa como función de enlace para asociar covariables. Peng, Li, Yang, Mi, & Huang (2017), utilizan el análisis de confiabilidad del sistema de husillo de una máquina-herramienta para trabajos pesados para proponer modelos paramétricos de procesos gaussianos inversos para modelar procesos de degradación con tasa de degradación constante, monótona y en forma de S. Por su parte Ye, Revie, & Walls (2014), aplican el proceso gaussiano inverso para desarrollar un modelo para un sistema de carga compartida de una empresa de servicio de agua, utiliza las probabilidades de falla de degradación del sistema para obtener diseños óptimos para minimizar el costo promedio a largo plazo de un sistema futuro. Liu, Sun, Pan, Feng, & Tang (2016), mediante un caso de estudio con datos de degradación de las células de iones de litio, proponen un modelo ampliando al modelo general de trayectorias de degradación, considerando los efectos de esfuerzos variables en el tiempo de manera de capturar la influencia de distintos esfuerzos en la característica del desempeño. Wang, Jiang, Guo, & Cheng (2014), mediante el análisis de dos casos de estudio (capacitores y laser), investigan y validan un método propuesto para la evaluación de la confiabilidad en tiempo real basado en un modelo general de degradación por medio del proceso Wiener. Peng & Tseng (2009) utilizaron el modelo Wiener para capturar la degradación de los dispositivos láser e investigaron los efectos de la especificación errónea del modelo en las predicciones del MTTF de un producto concluyendo que no es crítico en el caso de muestras grandes.

2.5. Modelo general de trayectorias de degradación

De acuerdo con Meeker y Escobar (1998) La trayectoria de la degradación real de una unidad en particular en el tiempo se denota por

$$D(t), \quad t > 0.$$

En aplicaciones, los valores de $D(t)$ son muestreados en puntos discretos en tiempo t_1, t_2, \dots la degradación observada de la muestra y_{ij} de la unidad i en el tiempo t_j es

$$Y_{ij} = D_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1, \dots, m$$

Donde $D_{ij} = D(t_{ij}, \beta_{1i} \dots \beta_{ki})$ es la trayectoria real de la unidad i en el tiempo t_{ij} (los tiempos no tienen que ser los mismos para todas las unidades) y $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\epsilon)$ es una desviación residual para la unidad i en el instante t_j . El número total de inspecciones en la unidad i se denomina m_i . El tiempo t podría ser en tiempo real, tiempo de operación o alguna otra medida apropiada de uso como millas para neumáticos de automóviles o ciclos en pruebas de fatiga. Para la unidad i , $\beta_{1i} \dots \beta_{ki} \dots$ es un vector de k parámetros desconocidos. Típicamente, las trayectorias de la muestra tienen $k = 1, 2, 3, \text{ o } 4$ parámetros. Como se sabe algunos de los $\beta_1 \dots \beta_k$, los parámetros serán aleatorios de una unidad a otra. Uno o más de los $\beta_1 \dots \beta_k$ parámetros, sin embargo, podrían ser modelados como comunes en todas las unidades.

2.6. Método de Estimación por Máxima verosimilitud

De acuerdo con Millar (2011), la función verosimilitud se define como la función de densidad (conjunta) evaluada en los datos observados, y se considera como una función solo de θ . Es decir, $L(\theta) \equiv L(\theta; y) = f(y; \theta), \theta \in \Theta$. La función de verosimilitud es igual o aproximadamente proporcional a la probabilidad de los datos.

La forma de la función de verosimilitud dependerá de factores como: el modelo de probabilidad asumido, la forma de datos disponibles (censurados, intervalos censurados, etc.), la pregunta o enfoque del estudio. Esto incluye cuestiones relacionadas con la identificabilidad de los parámetros (es decir, la capacidad de los datos o la imposibilidad de estimar ciertas características de un modelo estadístico) (Meeker et al., 1998).

La probabilidad total se puede escribir como la probabilidad conjunta de los datos. Suponiendo n observaciones independientes, la probabilidad de la muestra es

$$L(\theta) = L(\theta; Data) = \prod_{i=1}^n L_i(\theta; Data_i) \quad (2.28)$$

Donde $L_i(\theta; Data_i)$ es la probabilidad de la observación i el $Data_i$ es el dato para la observación i , y θ es el vector de parámetros desconocidos a ser estimados.

Walpole, Myers y Myers (2012) mencionan que la estimación por máxima verosimilitud representa uno de los métodos de estimación más importantes en toda la estadística inferencial. El método de estimación de máxima verosimilitud (MLE) es un procedimiento estadístico para la estimación de parámetros maximizando la probabilidad o probabilidad de que ocurra un determinado conjunto de fallas (Lee et al., 2015).

Según Lee et al. (2015), en la practica el logaritmo de la función de verosimilitud, llamada función de log-verosimilitud, es utilizada debido a que permite realizar cálculos más fácilmente. La estimación puntual de los parámetros del modelo

estadístico se puede obtener así, mediante la maximización de la función log-verosimilitud (Ye & Chen, 2014). La función se expresa de la siguiente forma

$$\ln[L(\theta)] = \ln[L(\theta; Data)] = \sum_{i=1}^n \ln[L_i(\theta; Data_i)] \quad (2.29)$$

O bien

$$\ln[L(\theta)] = \ln[L(\theta)] = \sum_{i=1}^n \ln[L_i(\theta)]$$

Rinne (2009) menciona que la idea de estimación de máxima verosimilitud es encontrar el vector $\hat{\theta} := \hat{\theta}_{ML}$, que maximiza la función de log-verosimilitud. La maximización generalmente se obtiene mediante algún método de gradiente basado en derivadas parciales, asumiendo que el vector de parámetros $\theta_1, \dots, \theta_m$ es continuo. La derivada parcial de $L(\theta)$ con respecto al parámetro θ_i ($i = 1, \dots, m$) se denota por $\partial L(\theta) / \partial \theta_i$, y la ecuación de verosimilitud sería la siguiente

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$$

El sistema de todas las ecuaciones de verosimilitud,

$$\frac{L(\theta)}{\partial \theta} := \left(\frac{L(\theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{L(\theta)}{\partial \theta_m} \right)' = 0,$$

Las soluciones $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ son puntos estacionarios de la función log-verosimilitud y pueden incluir el Estimador Máximo de Verosimilitud como el máximo global (Rinne, 2009). Cualquier valor del parámetro que maximice la probabilidad también maximiza la probabilidad logarítmica, generalmente es el caso de que los cálculos se hagan usando $\ln[L(\theta)]$ en lugar de $L(\theta)$. En particular, si la función de log-verosimilitud es diferenciable, sus derivadas parciales son cero cuando se evalúan en cualquier valor

extremo local. Estos puntos corresponden a las soluciones de la(s) ecuación(s) de verosimilitud (Millar, 2011).

2.7. Modelos Estadísticos para Procesos de Degradación

2.7.1. Proceso Wiener General

Otro proceso estocástico interesante utilizado en la literatura como un modelo de degradación es el proceso de Wiener (Bordes et al., 2010). Algunos hechos básicos sobre el proceso Wiener. Se dice que un proceso W es un movimiento browniano con deriva μ y difusión σ^2 si $W(t) = \mu t + \sigma B(t)$ donde B es un movimiento browniano estándar con varianza t . El proceso W tiene las siguientes propiedades:

1. $W(0) = 0$;
2. W tiene trayectorias de muestras continuas;
3. W tiene incrementos independientes;
4. Para cualquier $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $W(t) - W(s)$ tiene distribución normal con media $\mu(t - s)$ y la varianza $\sigma^2(t - s)$.

La función de densidad de probabilidad de un proceso Wiener con los parámetros μ y σ es

$$f(\Delta W(t); \mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp - \left\{ \frac{(\Delta W(t) - \mu\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right\} \quad (2.30)$$

La CDF del proceso Wiener es

$$F_w(\Delta W(t)) = \Phi \left[\frac{\Delta W(t) - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right] \quad (2.31)$$

Sin embargo Bordes, Paroissin, & Salami (2010), hacen mención de que existe el inconveniente de la suposición Gaussiana conduzca a un proceso con rutas de muestreo no monótonas. Esta es la razón por la cual este proceso puede ser inadecuado para modelar el deterioro monótono (Park & Padgett, 2005).

El instante de una falla provocada por la degradación es aquel momento en que la trayectoria de degradación logra llegar a un nivel crítico ω . Donde, el tiempo de vida se define como $T\omega = \inf\{W(t) \geq \omega\}$. Se conoce que $T\omega$ sigue una distribución IG como

$$F(t) = \Pr(T\omega \leq t) = \Phi \left[\sqrt{\frac{1}{\sigma^2 t}} (\mu t - \omega) \right] + \exp \left\{ \frac{2\mu\omega}{\sigma^2} \right\} \times \Phi \left[-\sqrt{\frac{1}{\sigma^2 t}} (\mu t + \omega) \right] \quad (2.32)$$

2.7.2. Proceso Gamma

El proceso gamma es uno de los modelos estadísticos de mayor uso en el análisis de degradación. La principal forma de modelar un proceso de degradación tiene su base en el proceso gamma, dado que tiene la característica de que los incrementos de esta degradación son independientes entre sí y además son no negativos y tienen una distribución gamma con un parámetro de escala idéntico. En el caso del modelo de degradación de un proceso gamma, el rendimiento solo puede disminuir con el tiempo, lo que lo hace bastante utilizable (Bagdonavičius & Nikulin, 2000; Lawless & Crowder, 2004; Park & Padgett, 2005).

Las características importantes del proceso de gamma incluyen los hechos de que se trata de un proceso estocástico con incrementos independientes y no negativos. Considerando un proceso con valores no negativos $\{Z(t), t > 0\}$, donde $Z(t)$ representa la degradación medida para una unidad individual en el tiempo t , entonces el proceso gamma tiene las siguientes propiedades:

- $Z(t) - Z(s) = \Delta Z(s, t)$ sigue una distribución gamma $Ga(\alpha, u)$
- $Z(t)$ tiene incrementos independientes, $Z(t_i) - Z(t_{i-1})$, donde $t_i > t_{i-1}$

Suponiendo que una cantidad aleatoria X tiene una distribución gamma con el parámetro de forma $v > 0$ y el parámetro de escala $u > 0$, la función de densidad de probabilidad (PDF) se define de la siguiente manera:

$$f(x|v, u) = \frac{u^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} \exp\{-ux\} \quad (2.33)$$

Donde, $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$, $a > 0$. Siendo v el parámetro de forma positivo, $t \geq 0$, $v(0) = 0$, y $u > 0$ un parámetro de escala. Entonces $G(t), t > 0$, es un proceso gamma con parámetros anteriormente descritos y con las siguientes características.

- i) $G(t + \Delta t) - G(t) = \Delta G(t)$, sigue una distribución Gamma $Ga(v[\tau(t + \Delta t) - \tau(t)], u)$
- ii) $G(t)$ tiene incrementos independientes, $G(t_4) - G(t_3)$ y $G(t_2) - G(t_1)$ son independientes $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Supongamos que el proceso estocástico creciente $G(t)$ describe el nivel de degradación de algún elemento en el tiempo t ; por lo tanto, el PDF está dado por,

$$f_{G(t)}(x) = \frac{u^{v(t)}}{\Gamma(v(t))} x^{v(t)-1} \exp\{-ux\} \quad (2.34)$$

Con

$$E(G(t)) = \frac{v(t)}{u}, \text{Var}(G(t)) = \frac{v(t)}{u^2} \quad (2.35)$$

Suponiendo que un proceso estocástico creciente describe el nivel de degradación de algunas características de desempeño en el tiempo t , y está gobernado por un proceso Gamma $Ga(v\Delta t, u)$ con la media $v\Delta t/u$ y la varianza $v\Delta t/u^2$, entonces $\Delta G(t)$ tiene el siguiente PDF y CDF

$$f_{Ga}(\Delta G(t)) = \frac{u^{v\Delta t}}{\Gamma(v\Delta t)} \Delta G^{v\Delta t-1} \exp\{-u\Delta G\} \quad (2.36)$$

$$F_{Ga}(\Delta G(t)) = \int_0^{\omega} f_{Ga(t)}(g) dg = \frac{\Gamma(v\Delta t, u\Delta G(t))}{\Gamma(v\Delta t)} \quad (2.37)$$

Donde $\Gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$, es la función Gamma inferior incompleta.

El instante de una falla que es causada por la degradación es aquel momento en que la ruta de degradación alcanza su nivel crítico ω . Por lo tanto, el tiempo de vida se define como $T\omega = \inf\{G(t) \geq \omega\}$. El CDF de $T\omega$ se puede obtener como $P(G(t) \geq \omega) = 1 - F_{Ga}(\omega, vt, u)$ o como

$$P(G(t) \geq \omega) = \int_{\omega}^{\infty} f_{G(t)}(g) dg = \frac{\Gamma(v\Delta t, u\omega)}{\Gamma(v\Delta t)} \quad (2.38)$$

Donde $\Gamma(a, s) = \int_s^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz$, es la función Gamma superior incompleta.

Considerando una prueba de Degradación, de acuerdo con la propiedad de incremento independiente del proceso gamma $G_i(t_j) = G_i(t_j) - G_i(t_j - 1), t_0 = 0, \tau(t_j, \gamma) = \tau(t_j, \gamma) - \tau(t_j - 1, \gamma)$.

2.7.3. Proceso Inverso Gaussiano

De acuerdo con (Liu et al., 2014) el proceso Gaussiano inverso (IG) es otra buena opción para el modelado de degradación que proporciona una ruta de degradación monótona. (Chhikara & Folks, 1977) indican que en general el proceso gaussiano inverso tiene una tasa de fallas que no es monótona; inicialmente aumenta y luego disminuye con un valor asintótico alcanzado al final distinto de cero. La función de densidad de probabilidad de una distribución gaussiana inversa con los parámetros μ y λ es

$$f(x; \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left[\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right], \quad x > 0 \quad (2.39)$$

Donde μ y λ se asumen positivas. La función de densidad de probabilidad es unimodal y sesgada. Donde μ es la media de la distribución y λ es un parámetro de forma. La varianza para la distribución es μ^3/λ , lo que implica que μ no es un parámetro de ubicación en el sentido habitual. Teniendo en cuenta que un proceso de degradación se puede ver como un proceso estocástico, la ruta de degradación a lo largo del tiempo se puede modelar mediante un proceso estocástico $\{Z(t); t > 0\}$. En este caso, se considera que un proceso IG controla el proceso de degradación de una característica de desempeño (Luis Alberto Rodríguez-Picón et al., 2017). El proceso de IG con el parámetro de deriva (μ) y el parámetro de difusión (λ) tiene las siguientes características:

- $Z(t) - Z(s)$ siguen una distribución $IG[\mu(t - s), \lambda(t - s)^2]$.
- $Z(t)$ tiene incrementos independientes, $Z(t_4) - Z(t_3)$ and $Z(t_2) - Z(t_1)$ son independientes $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Si $\Delta Z(t)$ está gobernada por $IG(\mu\Delta t, \lambda\Delta t^2)$ con media $\mu\Delta t$ y varianza $\mu^3\Delta t/\lambda$, de esa manera siguen una PDF y CDF como sigue,

$$f_{IG}(\Delta Z(t); \mu\Delta t, \lambda\Delta t^2) = \sqrt{\frac{\lambda\Delta t^2}{2\pi\Delta Z^3(t)}} \exp\left\{-\frac{\lambda(\Delta Z(t) - \mu\Delta t)^2}{2\mu^2\Delta Z(t)}\right\} \quad (2.40)$$

$$F_{IG}(\Delta Z(t)) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{\Delta Z(t)}}\left(\frac{\Delta Z(t)}{\mu} - \Delta t\right)\right] + \exp\left(\frac{2\lambda\Delta t}{\mu}\right) \times \Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{\Delta Z(t)}}\left(\frac{\Delta Z(t)}{\mu} + \Delta t\right)\right] \quad (2.41)$$

Si la ruta de degradación de la PC de un producto está gobernada por $IG(\mu\Delta t, \lambda\Delta t^2)$, y cuando la ruta alcanza un valor de degradación crítico ω , entonces la vida $T\omega$ del producto se define como $T\omega = \inf\{Z(t) \geq \omega\}$. Dada la propiedad de monotonidad del proceso de IG, es bien sabido que la función de distribución acumulativa (CDF) de $T\omega$ se puede obtener como $P(Z(t) \geq \omega) = 1 - F_{IG}(\omega, IG(\mu\Delta t, \lambda\Delta t^2))$. Por lo tanto, la función de confiabilidad se define como

$$P(Z(t) < \omega) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{\omega}{\mu} - t\right)\right] + \exp\left\{\frac{2\lambda t}{\mu}\right\} \times \Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{\omega}{\mu} + t\right)\right] \quad (2.42)$$

Donde Φ denota la CDF de la normal estándar $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

2.7.4. Proceso Browniano Geométrico

Teniendo en cuenta que, en muchas aplicaciones, la degradación es positiva y el movimiento browniano puede tomar valores negativos, su uso en algunos procesos de degradación es cuestionable. Por otro lado, el proceso del modelo Browniano Geométrico tiene una variación no negativa, lo que lo hace bastante útil para aumentar estrictamente el proceso de degradación.

Este proceso se define como

$$Y(t) = e^{W(t)} \quad (2.43)$$

$$\ln(Y(t)) = W(t)$$

Donde $W(t)$ es un proceso Wiener con deriva $W(t) = \mu t + \sigma B(t)$, donde $W(t) = \ln(Y(t))$ sigue una distribución normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$. Por lo tanto, en un tiempo dado t , $Y(t)$ tiene una distribución lognormal con parámetros $\mu' t$ y varianza $\sigma' \sqrt{t}$. Si es $\Delta Y(t)$ gobernada por $LN(\mu' t, \sigma' \sqrt{t})$ con media $\exp\{\mu' t, \sigma'^2 t/2\}$ y varianza $\exp\{2\mu' t, \sigma'^2 t\}(\exp\{\sigma'^2 t\} - 1)$, de esa manera sigue la PDF,

$$f_{GBM}(\Delta Y(t)) = \frac{1}{\Delta Y(t) \sqrt{2\pi\sigma'^2 t}} \exp\left\{-\frac{(\ln(\Delta Y(t)) - \mu' t)^2}{2\sigma'^2 t}\right\} \quad (2.44)$$

Ahora bien, se considera que durante las pruebas de degradación, donde la medición obtenida de la degradación $Y_i(t_j)$ de la i -ésima unidad en el tiempo correspondiente t_j , con $j = 1, 2, \dots, M$. Considerando, $\Delta Y_i(t_j) = Y_i(t_j) - \Delta Y_i(t_{j-1})$, $t_0 = 0$, $\Delta t_j = \Delta t_j - \Delta t_{j-1}$, para $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$. De esa manera es posible obtener la variable aleatoria $\Delta Y_i(t_j) \sim LN(\mu' \Delta t, \sigma' \sqrt{\Delta t})$ con la siguiente PDF y CDF

$$f_{GBM}(\Delta Y_i(t_j)) = \frac{1}{\Delta Y_i(t_j) \sqrt{2\pi\sigma'^2\Delta t_j}} \exp \left\{ -\frac{(\ln(\Delta Y_i(t_j)) - \mu'\Delta t_j)^2}{2\sigma'^2\Delta t_j} \right\} \quad (2.45)$$

$$F_{GBM}(\Delta Y_i(t_j)) = \Phi \left[\frac{\ln(\Delta Y_i(t_j)) - \mu'\Delta t_j}{\sigma'\sqrt{\Delta t_j}} \right] \quad (2.46)$$

$$P(Y(t) < \omega) = \Phi \left[\frac{\ln(\omega - \mu't_j)}{\sigma'\sqrt{t_j}} \right] \quad (2.47)$$

2.8. Datos de degradación acelerada

Mencionado por (Meeker, Escobar and Lu, 1998) En los estudios de confiabilidad, es posible medir la degradación directamente, ya sea de forma continua en el tiempo o en puntos específicos en el tiempo. El análisis de confiabilidad a través de los datos de degradación, cuando estos están disponibles, puede tener ventajas prácticas tales como:

- Los datos de degradación pueden proporcionar más información sobre la confiabilidad de productos que la que se pudiera obtener a partir de los datos de tiempo de falla censurados tradicionales, particularmente en aquellas pruebas donde se esperan pocas o ninguna falla.
- Las pruebas aceleradas se usan comúnmente para obtener información de pruebas de confiabilidad más rápidamente. La observación directa del proceso de degradación (por ejemplo, en el desgaste de los neumáticos) puede permitir el modelar directamente el mecanismo causante de fallas, proporcionando estimaciones de confiabilidad más creíbles y precisas y una base más básica

para la extrapolación que a menudo se necesita. Modelar la degradación del rendimiento de un componente o subsistema (por ejemplo, voltaje o potencia) puede ser útil, pero el modelado podría ser más complicado o difícil porque el resultado puede verse afectado, sin saberlo, por más de un proceso causante de fallas físicas / químicas.

2.9. Modelos de degradación acelerada

El nivel de degradación para una unidad de observación típica en el tiempo t y la variable de aceleración $AccVar$ (por ejemplo, temperatura, humedad) se denota por $\mathcal{D}(\tau, x, \beta)$, donde $\tau = h_t(t)$ y $x = h_a(AccVar)$ son transformaciones crecientes monótonas conocidas de t y $AccVar$, y siendo β un vector de parámetros desconocidos.

Para alguna clase de modelos de degradación, la degradación transformada Y para una unidad en el tiempo transformado τ y el nivel de la variable acelerada transformada x es

$$Y = \mu(\tau, x) + \epsilon$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) \tau + \epsilon \quad (2.48)$$

Donde $\mu(\tau, x) = h_d(\mathcal{D})$, una transformación creciente monótona de \mathcal{D} , es un parámetro de ubicación para la distribución de Y que depende de los parámetros desconocidos en $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, y ϵ es la desviación residual que describe la variabilidad de unidad a unidad con $(\epsilon / \sigma) \sim \Phi(z)$, donde $\Phi(z)$ es una función de la distribución acumulativa completamente especificada (cdf). Por ejemplo, $\Phi(z)$ puede

ser reemplazado por $\Phi_{nor}(z)$ el cdf de la normal estandarizada, o por $\Phi_{sev}(z)$ el cdf del valor extremo más pequeño. Los parámetros del modelo β y σ son fijos pero desconocidos.

2.10. Función de la Distribución Acumulada de la Degradación

Para un tiempo y una variable a un nivel de aceleración dados la cdf para la degradación transformada Y es

$$F_Y(y; \tau, x) = \Pr(Y \leq y; \tau, x) = \Phi \left[\frac{y - \mu(\tau, x)}{\sigma} \right] \quad (2.49)$$

Donde $\mu(\tau, x) = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) \tau$

2.10.1. Cuantiles de la Degradación

La función del p cuantil para la degradación transformada en (τ, x) es

$$y_p = \mu(\tau, x) + \sigma \Phi^{-1}(p) \quad (2.50)$$

$$y_p = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x) \tau + \sigma \Phi^{-1}(p) \quad (2.51)$$

Donde $\Phi^{-1}(p)$ es el p cuantil de la distribución estándar de localización-escala.

2.11. Distribución de Tiempo de Falla para los Modelos de Degradación

2.11.1. Relación entre la degradación y la falla

Meeker y Escobar (1998), señalan que algunos productos experimentan una pérdida gradual en sus características de desempeño o de su rendimiento con el paso del tiempo. Por lo tanto, la falla se puede definir en un nivel de degradación especificado. Esta definición de falla se conoce como "falla suave". Si se usa \mathcal{D}_f para denotar el

nivel crítico para la distribución de degradación en la cual se supone que ocurre la falla. El tiempo de falla, T , se define como el tiempo en el cual la degradación observada cruza el crítico especificado.

2.11.2. Función de distribución acumulativa de tiempo de falla

La degradación puede disminuir o aumentar con el tiempo, dependiendo del signo de β_1 . Para una degradación decreciente (es decir, cuando β_1 es negativo), el tiempo de falla T que es menor que t es equivalente a una degradación observada que es menor que el nivel crítico \mathcal{D}_f en el tiempo t (es decir, el evento $T \leq t$ equivalente al evento $y \leq y_f$, donde $y_f = h_d(\mathcal{D}_f)$). Entonces el cdf de tiempo de falla es

$$F_T(t; x) = \Pr(T \leq t) = \Pr(Y \leq y_f) = F_Y(y_f; \tau, x) \quad (2.52)$$

$$F_T(t; x) = \Phi \left[\frac{y_f - \mu(\tau, x)}{\sigma} \right] \quad (2.53)$$

$$F_T(t; x) = \Phi \left[\frac{\tau - v}{\varsigma} \right], \quad \text{para } t \geq 0 \quad (**) \quad (2.54)$$

donde

$$v = \frac{(\beta_0 - y_f) \exp(-\beta_2 x)}{|\beta_1|} \quad (2.55)$$

$$y \quad \varsigma = \frac{\sigma \exp(-\beta_2 x)}{|\beta_1|} \quad (2.56)$$

Con una transformación de tiempo, $h_t(t)$, para la cual $\tau = 0$ cuando $t = 0$, la distribución de tiempo de falla para la degradación decreciente es una mezcla con un pico $\Pr(T = 0) = \Phi [(y_f - \beta_0) / \sigma] = \Phi (-v / \varsigma)$ en $t = 0$. El pico representa la probabilidad de falla para una nueva unidad que no experimenta envejecimiento y en

ocasiones se le denomina probabilidad de muerte a la llegada o bien “dead-on-arrival (DOA)”. Para $t > 0$, el cdf de tiempo de falla es continuo y concuerda con el cdf de una variable de log-localización-escala con un CDF estandarizado $\Phi(\cdot)$ con parámetro de localización v y parámetro de escala ζ .

Para una degradación creciente (es decir, β_1 es positivo), el tiempo de falla T menor que t es equivalente a una degradación observada que es mayor que el nivel crítico \mathcal{D}_f en el tiempo t [es decir, el evento $T \leq t$ es equivalente al evento $Y \geq y_f$, donde $y_f = h_d(\mathcal{D}_f)$].

Entonces

$$\begin{aligned}
 F_T(t; x) &= \Pr(T \leq t) = \Pr(Y \geq y_f) \\
 F_T(t; x) &= 1 - F_Y(y_f; \tau, x) \\
 F_T(t; x) &= 1 - \Phi \left[\frac{y_f - \mu(\tau, x)}{\sigma} \right] \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

$$F_T(t; x) = 1 - \Phi \left[\frac{-\tau - v}{\zeta} \right], \quad \text{para } t \geq 0 \quad (***)$$

En este caso el pico en $t = 0$ es $\Pr(T = 0) = 1 - \Phi \left[\frac{y_f - \beta_0}{\sigma} \right] = 1 - \Phi \left[\frac{-v}{\zeta} \right]$

2.12. Análisis de los modelos de degradación y los modelos estadísticos

Algunas de las investigaciones llevadas a cabo con las relaciones de vida esfuerzo se pueden encontrar en el estudio de Cui (2005), quien llevó a cabo una prueba de confiabilidad acelerada del ciclo de temperatura para el empaque de dispositivos

electrónicos, utilizando el modelo de Coffin-Manson y el análisis de Weibull para determinar la energía de activación relacionada con el mecanismo de falla de grietas.

Rodríguez-Picón, Rodríguez Borbón, Valles-Rosales, & Flores Ochoa (2016), realizaron un estudio donde analizan modelos de degradación multivariantes considerando dos variables de estrés acelerado, que caracterizan dos procesos de degradación basados en la relación Arrhenius de estrés vital y la relación de la ley de potencia inversa aplicado en sensores de combustible que mide la cantidad de etanol cuando se mezcla con gasolina en el tanque de gasolina.

Huang Peng, Liu, Sun, & Huang (2016), proponen un enfoque de estimación de confiabilidad para las uniones soldadas con aleación de aluminio, basado en el proceso Wiener para modelar la degradación, observando la medición de la imagen del crecimiento de grietas.

Ling, Tsui, & Balakrishnan (2015), analizan la degradación mediante un ejemplo numérico de la intensidad de luz de diodos emisores de luz (LED), basándose en un proceso gamma, una transformación del tiempo y la ley de potencia inversa como función de enlace para asociar covariables.

Peng, Li, Yang, Mi, & Huang (2017), utilizan el análisis de confiabilidad del sistema de husillo de una máquina-herramienta para trabajos pesados para proponer modelos

paramétricos de procesos gaussianos inversos para modelar procesos de degradación con tasa de degradación constante, monótona y en forma de S.

Por su parte Ye, Revie, & Walls (2014), aplican el proceso gaussiano inverso para desarrollar un modelo para un sistema de carga compartida de una empresa de servicio de agua, utiliza las probabilidades de falla de degradación del sistema para obtener diseños óptimos para minimizar el costo promedio a largo plazo de un sistema futuro.

Liu, Sun, Pan, Feng, & Tang (2016), mediante un caso de estudio con datos de degradación de las células de iones de litio, proponen un modelo ampliando al modelo general de trayectorias de degradación, considerando los efectos de esfuerzos variables en el tiempo de manera de capturar la influencia de distintos esfuerzos en la característica del desempeño.

Wang, Jiang, Guo, & Cheng (2014), mediante el análisis de dos casos de estudio (capacitores y laser), investigan y validan un método propuesto para la evaluación de la confiabilidad en tiempo real basado en un modelo general de degradación por medio de un proceso Wiener.

2.13. Métodos estadísticos para el análisis de datos de degradación

2.13.1. Métodos basados en inferencia "clásica"

El objetivo principal de un análisis estadístico de los datos de degradación es obtener una estimación de la distribución del tiempo de falla $F_T(t)$. Por lo tanto, para un modelo de ruta de degradación dado, dos pasos principales están involucrados en dicho análisis: (1) la estimación de los parámetros del modelo y (2) la evaluación de $F_T(t)$.

Para algunos modelos de trayectoria particularmente simples, $F_T(t)$ se puede expresar como una función simple, y se pueden usar métodos simples, como el aproximado y el analítico, para estimar $F_T(t)$. Los métodos de dos etapas y los métodos numéricos son más completos y hacen posible la estimación de $F_T(t)$ en cualquier situación.

2.13.2. El método aproximado

El método aproximado consta de dos pasos. El primero consiste en un análisis separado para cada unidad para predecir el tiempo en que la unidad alcanzará el nivel crítico de degradación (D_f) correspondiente a la falla.

Estos tiempos se denominan tiempos de "pseudo" falla. En el segundo paso, los n tiempos de "pseudo" falla se analizan como una muestra completa de tiempos de falla para estimar $F_T(t)$. El procedimiento del método es el siguiente.

- Para la unidad i , use el modelo de ruta $y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij}$, y los datos de ruta de muestra $(t_{i1}, y_{i1}), \dots, (t_{im}, y_{im})$ para encontrar la estimación de máxima verosimilitud (condicional) de $\alpha_i(\alpha_{i1}; \alpha_{i2}; \dots \alpha_{ip})^t$ y $\beta_i(\beta_{i1}; \beta_{i2}; \dots \beta_{ik})^T$, llamadas $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}_i$. Esto se

puede hacer utilizando el método de mínimos cuadrados (lineales o no lineales, dependiendo de la forma funcional de la ruta de degradación).

- Resuelva la ecuación $D(t; \hat{\alpha}_i; \hat{\beta})_i = D_f$ para t y llame a la solución $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$.
- Repita el procedimiento para cada ruta de muestra para obtener los tiempos de pseudo falla solución $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$.
- Haga un solo análisis de distribución de tiempo hasta la falla de los datos solución $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$ para estimar $F_T(t)$.

El método aproximado es simple e intuitivamente atractivo. Sin embargo, solo es adecuado en casos donde la ruta de degradación $D(t)$ es relativamente simple, el modelo de degradación considerado es lo suficientemente apropiado, hay suficientes datos de degradación para estimar con precisión α_1 y β_i , la magnitud de los errores es pequeña, y finalmente la magnitud de la extrapolación necesaria para predecir los tiempos de falla es pequeña.

2.13.3. El método analítico

Para algunos modelos de trayectoria simple, $F_T(t)$ puede expresarse en forma cerrada. El siguiente ejemplo proporciona una ilustración de tal caso.

Suponga que la ruta de degradación real de una unidad en particular viene dada por $D(t) = \alpha + \beta t$, donde α es fijo y representa la cantidad inicial común de degradación de todas las unidades de prueba al comienzo de la prueba ($D(0) = \alpha$), y por lo tanto corresponden a un efecto fijo; β es la tasa de degradación que varía de una unidad a otra y corresponde a un efecto aleatorio.

Suponiendo que β varía de una unidad a otra de acuerdo con una distribución logarítmica normal con los parámetros μ_β y σ_β , es posible definir la función de distribución de T , por

$$F_T(t) = P\left(\frac{Df - \alpha}{\beta} \leq t\right) = P\left(\beta \geq \frac{Df - \alpha}{t}\right) = 1 - \left(\frac{\log(Df - \alpha) - \log t - \mu_\beta}{\sigma_\beta}\right)$$

$$F_T(t) = 1 - \Phi_{nor}\left(\frac{\log t - [\log(Df - \alpha)] - \mu_\beta}{\sigma_\beta}\right), t > 0 \quad (2.58)$$

donde $\Phi_{nor}(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar. En este caso, T también es log-normal con parámetros de ubicación y escala dados por $\mu_T = [\log(Df - \alpha) - \mu_\beta]$ y $\sigma_T = \sigma_\beta$. Se pueden usar otras funciones de densidad de probabilidad junto con los mismos procedimientos para obtener la distribución de tiempo de falla $F_T(t)$.

2.13.4. El método numérico

En Muchas situaciones prácticas se describen mediante modelos no lineales que incluyen más de un efecto aleatorio. En estos casos, es muy difícil obtener una expresión de forma cerrada para $F_T(t)$. En estos casos, la estimación de los parámetros del modelo debe hacerse maximizando la función de probabilidad numéricamente.

Suponga que en el modelo de ruta de degradación general $y_{ij} = D_{ij} = D(t_{ij}; \alpha; \beta_i) + \varepsilon_{ij}$, el vector de parámetros $\theta^t = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_k)$ sigue una distribución normal multivariada (MVN), con el vector medio μ_θ y la matriz de varianza-covarianza Σ_θ . Además, suponga que los errores aleatorios $\{\varepsilon_{ij}\}$ siguen una distribución normal con

media cero y varianza constante σ_ε^2 . La suposición de la distribución MVN para Θ permite que la información de la trayectoria de la unidad $D(t)$ se concentre solo en los parámetros μ_θ y Σ_θ sin pérdida de información. Para los componentes de efectos fijos de Θ , los valores se establecen iguales a los efectos apropiados y los términos de varianza y covarianza respectivos que involucran los efectos fijos se establecen iguales a cero.

La estimación de $\mu_\theta, \Sigma_\theta$ y σ_ε^2 se realiza a partir de la siguiente función de probabilidad:

$$\ell = (\mu_\theta, \Sigma_\theta, \sigma_\varepsilon \setminus Data) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \Phi(\zeta_{ij}) \right] f_\theta(\Theta; \mu_\theta; \Sigma_\theta) d\Theta \quad (2.59)$$

Donde

$$\zeta_{ij} = [y_{ij} - D(t_{ij}, \Theta_i)] / \sigma_\varepsilon = [y_{ij} - D(t_{ij}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ip}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik}; \mu_\theta, \Sigma_\theta)] / \sigma_\varepsilon$$

$f_\theta(t_{ij}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ip}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik}; \mu_\theta; \Sigma_\theta)$ es la función de densidad normal multivariable.

2.14. Modelos Lineales Generalizados

Badiella (2011) menciona, que los modelos estadísticos paramétricos de forma general se basan en el análisis de ciertas variables de interés y su relación lineal con ciertas variables de control que contribuyen a explicar su comportamiento. Se acostumbra medir dichas características en sujetos, individuos o en especímenes de prueba que son independientes entre sí, donde generalmente se asume, que el error no explicado sigue una distribución Normal homogénea. Sin embargo, podría suceder que la variable objetivo solo tome en cuenta valores dentro de un intervalo o bien que

sea de tipo discreta, o quizás tampoco sea de tipo cuantitativa. Es así, con estas consideraciones es que se puede determinar que los errores no siempre son Normales. Dichas conclusiones dan lugar a los modelos lineales generalizados (GLM). En los casos en los cuales se busca reducir restricciones sobre los errores y además mantener la propiedad de Normalidad, es decir que se contemplan errores no independientes o heterogéneos da lugar a otra posible generalización. Los modelos que permiten brindar una estructura a la variabilidad de los errores se les denomina modelos mixtos (MIXED). Dichos modelos incorporan componentes tanto sistemáticos como aleatorios y con frecuencia se determina que el error aleatorio no explicado tiene la bondad de seguir una distribución Normal (Nelder y Wedderbur, 1972).

De acuerdo con Ataharul & Chowdhury (2017), en el modelo de regresión, lineal o no lineal, la suposición sobre la variable de respuesta es esencialmente una suposición de normalidad, pero se conoce que en diversas situaciones tal suposición no llega a ser cierta debido a amplio rango de situaciones donde dicha suposición es irreal. Por ejemplo, en los datos de ciclos de vida o duración para analizar la confiabilidad o la supervivencia, las distribuciones de probabilidad son muy sesgadas y no es posible considerar una suposición de normalidad de los datos. Por lo tanto, para distribuciones no normales como exponencial o gamma, los modelos de regresión lineal no son aplicables directamente. Para abordar las diversas situaciones donde el supuesto de normalidad no se cumple para el modelado lineal, el modelo lineal

generalizado o GLM por sus siglas en inglés, proporciona un marco general para relacionar los componentes aleatorios y sistemáticos subyacentes.

Para modelos lineales generalizados, se supone que la distribución de la variable de resultado se puede representar en forma de la familia de distribuciones exponencial.

$$f(y; \theta) = e^{[a(y)b(\theta)+c(\theta)+d(y)]} \quad (2.60)$$

Donde $a(y)$ y $d(y)$ son funciones de y , $b(\theta)$ y $c(\theta)$ son funciones del parámetro θ solamente. Si $a(y) = y$, y $b(\theta) = \theta$, entonces θ se le llama parámetro natural.

$$f(y; \theta) = e^{\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right]} \quad (2.61)$$

Donde $b(\theta)$ es la nueva función de θ , $a(\phi)$ es una función de ϕ llamado parámetro de dispersión y $c(y, \phi)$ es una función de y y de ϕ .

Por ejemplo, en la distribución Poisson se tiene

$$f(y; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = e^{(y \ln \lambda + \ln y! - \lambda)} = e^{\left[\frac{y \ln \lambda - \lambda}{1} + \ln y!\right]} \quad (2.62)$$

Donde

$$\theta = \ln \lambda, \quad b(\theta) = \lambda, \quad a(\phi) = 1, \quad c(y, \phi) = \ln y!$$

El componente aleatorio especifica la pdf o la pmf de la variable de respuesta. Siendo Y la variable aleatoria especificada por $Y \sim f(y, \theta, \phi)$ donde θ es el parámetro de interés. La función del valor esperado de Y , $E(Y) = \mu$ y ϕ es el parámetro de

dispersión. Basados en el componente aleatorio, la relación entre el parámetro θ y el valor esperado μ , se puede expresar como $\theta = g(\mu)$.

El componente sistemático muestra la relación lineal entre las covariables y la variable de resultado. Este componente muestra la forma lineal de la siguiente manera:

$$\eta = X\beta \quad (2.63)$$

La cual puede expresarse de la siguiente forma

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p \quad (2.64)$$

La función de enlace desempeña un papel vital al vincular el componente aleatorio con el componente sistemático. El componente aleatorio se caracteriza por su parámetro θ . Por lo tanto

$$\theta = g(\mu) = \eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p \quad (2.65)$$

Como el valor esperado $\mu = E(Y/X)$ ahora se expresa en términos de una función lineal, donde se asume la linealidad en el parámetro, entonces es más significativo expresar el valor esperado como $\mu(\beta)$. Por lo que la función de enlace sería.

$$\theta = g[\mu(\beta)] = \eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p \quad (2.66)$$

Este enlace varía según el componente aleatorio subyacente o la especificación del pdf o pmf apropiado de la variable de resultado.

La fusión entre los modelos lineales generalizados y los modelos mixtos dan lugar a los modelos lineales generalizados mixtos (GLMM), donde se combinan las propiedades de ambos modelos (Badiella, 2011).

En un modelo lineal generalizado, hay tres componentes.

- componente aleatorio,
- componente sistemático, y
- función de enlace.

Estos componentes proporcionan la forma generalizada para estimar los parámetros subyacentes de un modelo.

De acuerdo con Stroup y Kachman (1994) la idea central de un modelo lineal generalizado (GLM) puede entenderse observando el modelo lineal general. Este modelo es

$$y = X\beta + e \quad (2.67)$$

Donde y es el vector de observaciones, X es una matriz de constantes conocidas, β es el vector de parámetros y e es el vector del error con distribución $N(0, I\sigma^2)$. La función principal del modelo lineal es caracterizar el valor esperado $E(y)$ por medio de la combinación lineal de los parámetros $X\beta$.

El GLM también caracteriza el $E(y)$ por medio de $X\beta$. Sin embargo, debido a la distribución de probabilidad de los errores, a menudo es más razonable modelar una función de $E(y)$. Permitiendo que $\mu = E(y)$, la función $\eta = g(\mu)$ es modelada por $X\beta$ en el GLM. La función $g(\mu)$ es llamada función de enlace, esta enlaza μ con el modelo lineal $X\beta$.

Por ejemplo, en la distribución Poisson se tiene lo siguiente:

Componentes de GLM para datos de conteo

(i) Componente Aleatorio

Sea Y una variable aleatoria para los datos de recuento y supongamos que $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Entonces la forma exponencial se puede mostrar como

$$f(y; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = e^{(y \ln \lambda + \ln y! - \lambda)} = e^{\left[\left(\frac{y \ln \lambda - \lambda}{1}\right) + \ln y!\right]} \quad (2.68)$$

Donde

$$\theta = \ln y, \quad b(\theta) = \lambda, \quad a(\phi) = 1, \quad c(y, \phi) = \ln y!$$

$$\lambda = e^\theta, \quad b(\theta) = e^\theta, \quad E(Y) = \mu = b'(\theta) = e^\theta = \lambda$$

$$\text{Var}(Y) = a(\phi)b''(\theta) = e^\theta = \lambda$$

(ii) Componente Sistemático

El componente sistemático muestra la función lineal $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$

(iii) Función de enlace

La función de enlace natural es $\theta = \ln y$, el cual puede ser expresado como una función del valor esperado de Y , $\theta = \ln y = \ln \mu = g(\mu)$. Esta se conoce como la función log link. El componente aleatorio con el componente sistemático quedaría:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) = \ln \boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

Por lo que el modelo quedaría expresado como

$$\boldsymbol{\mu} = e^{\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}} \quad (2.69)$$

Un ejemplo del uso de la función Log link se realiza en los datos tomados de Shohji, Mori, & Orie (2004). La variable de respuesta es el número de ciclos. Las variables explicativas son el rango de Temperatura (ΔT), la frecuencia (f), y la temperatura máxima (T_{max}).

Para los datos de conteo, el vínculo entre el componente aleatorio y el componente sistemático se puede mostrar como

$$\theta_i = \ln \mu_i(\beta) \quad \text{donde } \mu_i(\beta) = e^{X_i\beta}$$

Los modelos lineales generalizados pueden aplicarse a cualquier dato donde la distribución de los errores pertenezca a la familia exponencial. La forma básica de la función log-verosimilitud para los miembros de la familia exponencial es

$$L(\alpha, \phi, y) = \frac{y' \alpha - b(\alpha)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \quad (2.70)$$

Donde α es el parámetro canónico o natural, ϕ es un parámetro de escala, y $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ y $c(\cdot)$ son funciones específicas cuya forma depende de una distribución en particular. Con frecuencia α es una función de enlace deseable, debido que es lineal con respecto al vector de observaciones. Es decir, una función apropiada de $E(y)$ es modelada por $X\beta$. El parámetro natural no es la única forma útil de la función de enlace, sin embargo, sugiere un punto de partida.

Para elementos de la familia exponencial, el GLM es $\eta = X\beta$

Donde $\eta = g(\mu)$ es una función de enlace, siendo $\mu = E(y)$. La función $h(\eta) = \mu$, donde $h(\cdot) = g^{-1}(\cdot)$ es llamada la función inversa de enlace. En muchas aplicaciones, incluyendo el modelo mixto lineal generalizado, es más útil, y a menudo

necesario, definir el GLM en términos de la función de enlace inversa en lugar de la función de enlace (Stroup and Kachman, 1994).

Caso de estudio

Se utilizan los datos de prueba de ciclo térmico de Shohji, Moru & Orii (2004) realizando una comparación de resultados con el modelo lineal y el modelo lineal generalizado, utilizando la relación de vida esfuerzo de Norris – Landzberg (Tabla 2.1).

Tabla 2.1. Condiciones de prueba del ciclo térmico y resultados (Shohji, Mori, & Orii, 2004)

Prueba no.	Condiciones de Prueba (°C)	Frecuencia (ciclos/h)	ΔT	Tiempo de aceleración (min)	Tiempo de permanencia (min)	Vida media (ciclos)
1	40–80	1	120	5	25	208
2	40–81	2	120	5	10	225
3	40–82	3	120	5	5	308
4	40–100	2	140	6	9	142
5	40–120	2	160	7	8	108
6	20–100	2	120	5	10	169
7	0–120	2	120	6	9	131
8	30–80	2	50	10	5	1300
9	30–100	2	70	10	5	650
10	30–120	2	90	11	4	258
11	20–30	2	50	12	3	6231
12	40–30	2	70	12	3	1450

La forma de expresión del modelo de Norris Landzberg es:

$$N = C \cdot (\Delta T)^{-n} \cdot f^m \cdot \exp \left[\frac{Ea}{K} \left(\frac{1}{T_{MAX}} \right) \right] \quad (2.71)$$

Donde se consideran los parámetros que incluyen C , Ea , n y m tienen que ser determinado a partir de los datos de prueba.

El modelo Norris-Landzberg es el más ampliamente utilizado en las pruebas de ciclos de temperatura. El modelo usa la frecuencia para expresar las etapas de rampa y pausa del perfil de prueba. Un ciclo de temperatura del perfil cíclico consta de cuatro etapas (Figura 2.1).

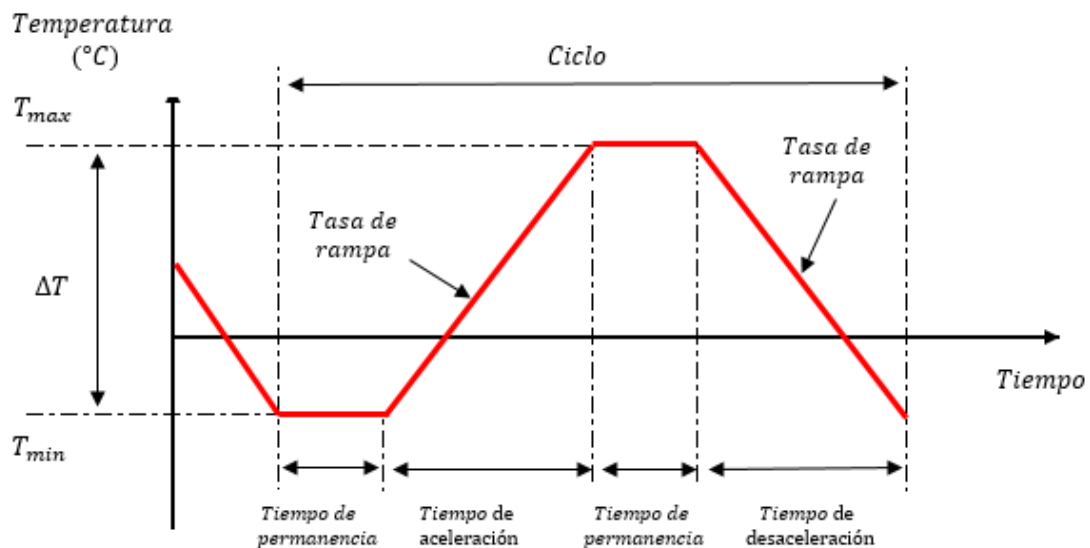


Figura 2.1. Perfil de ciclo de temperaturas

El perfil de ciclo de temperatura se puede dividir en cuatro etapas: etapa de aceleración, etapa de reducción gradual, etapa de pausa de alta temperatura y etapa de detención de baja temperatura.

De acuerdo con el modelo lineal generalizado con una distribución Poisson se aplicaría la función Log link aplicado a los datos de Shohji, Mori, & Orii (2004). La

variable de respuesta es el número de ciclos. Las variables explicativas son el rango de Temperatura (ΔT), la frecuencia (f), y la temperatura máxima (T_{max}).

Para los datos de conteo, el vínculo entre el componente aleatorio y el componente sistemático se puede mostrar como

$$\theta_i = \ln \mu_i(\beta) \quad \text{donde } \mu_i(\beta) = e^{X_i\beta}$$

El componente sistemático sería:

$$X_i\beta = \beta_0 + \beta_1 \Delta T + \beta_2 f + \beta_3 \left[\left(\frac{1}{T_{MAX}} \right) \right] \quad (2.72)$$

Siendo

$$\beta_0 = \ln A, \quad \beta_1 = -B, \quad \beta_2 = C, \quad \beta_3 = \frac{Ea}{K}$$

Ea = Energía de Activación

K = Constante de Boltzman

Se utiliza el software R para obtener los resultados del modelo lineal los cuales se muestran en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2. Resultados del análisis del modelo lineal

Variables	Intercepto	ln.delta_t	ln.frec	rec.t_max
Coefficientes	9.5164	-2.0635	0.3452	2006.4994

Se realizan los cálculos con los valores de los coeficientes del análisis del modelo lineal obteniendo lo siguiente.

$$\Delta T(\text{rango de temperatura}) = \exp(-2.0635) = 0.1270087$$

$$F(\text{frecuencia}) = \exp(0.3452) = 1.412272$$

$$\text{cte_boltzman} = 8.6171 * 10^{-5}$$

$$\text{La Energía de Activación es (Ea)} = 0.1729021$$

$$> \text{AIC} = 5.519782$$

Posterior al análisis del modelo lineal, se busca hacer una comparación realizando ahora el análisis con el Modelo Lineal Generalizado (GLM), los resultados se muestran en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3. Resultados del análisis del Modelo Lineal Generalizado

Variables	Intercepto	ln.delta_t	frec	rec.t_max
Coeficientes	1.94687	-0.02996	0.24014	2294.28650

Grados de Libertad: 11 Total (i.e. Null); 8 Residual

Null Deviance: 20660

Residual Deviance: 1294

AIC: 1395

Con los resultados mostrados por ambos modelos se puede concluir analizando el criterio de información de Akaike (AIC), este valor es utilizado como una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico. Al comparar los resultados del AIC con distinta modelización estadística, se podrá determinar aquel modelo que mejor se ajuste al conjunto de datos, siendo aquel que obtenga un menor valor. En los

resultados de este caso de estudio se puede observar que el modelo lineal es el mejor modelo con un valor de 5.51 de AIC.

2.15. Modelos lineales generalizados mixtos

Señalado por Zhang y Chen (2012), el modelo lineal de efectos mixtos (LMM) incorpora los efectos aleatorios en un modelo de regresión ordinario, el LMM admite correlaciones entre múltiples observaciones realizadas en la misma unidad experimental (e.g., sujeto, grupo, conglomerado, aula y centro) y permite diseños desbalanceados en los que no todos los sujetos requieren un número igual de observaciones y/o las mismas ocasiones de recolección de datos. El LMM se conoce también como modelo multinivel, modelo de coeficiente aleatorio o modelo lineal jerárquico. Para la estimación de máxima verosimilitud (MLE) de los parámetros LMM se puede realizar mediante distintos algoritmos de optimización numérica, como la expectación-maximización (EM), el método Newton – Raphson, por mínimos cuadrados iterativos generalizados (IGLS) o por puntuación de Fisher.

Por su parte Liu y Li (2011) hacen mención que los modelos de efectos mixtos son modelos de extensión de regresión que permiten la incorporación de efectos aleatorios, donde los efectos fijos pueden explicar la tendencia general de los datos y los efectos aleatorios pueden explicar la correlación dentro del sujeto. Por lo tanto, los modelos de efectos mixtos son una herramienta poderosa y efectiva para modelar la relación entre la variable de respuesta y las covariables en los estudios longitudinales.

El modelo general de efectos mixtos es

$$y_{ij} = X_{ij}^T \beta + Z_{ij}^T b_i + \varepsilon_{ij} \quad (2.73)$$

Donde y_{ij} y ε_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, denotan la respuesta y el error del modelo de la j -ésima medición del i -ésimo sujeto, los parámetros desconocidos $\beta \in R^p$ y $b_i \in R^q$ son usualmente llamados vector de efectos fijos y vector de efectos aleatorios respectivamente. La covariable X_{ij} y Z_{ij} , son los vectores de covariables asociados con los efectos fijos y efectos aleatorios. Además, suponemos que $E(b_i) = 0$, $var(b_i) = \Sigma$, $E(\varepsilon_i) = 0$, $var(\varepsilon_i) = R_i^2$.

2.16. Enfoques del Mantenimiento

Mencionado por Ran et al. (2019), el mantenimiento es una actividad sustancial en la industria, este tiene un efecto importante en la capacidad que tiene una empresa para lograr ser competitiva en precios, calidad y desempeño y por ende un impacto significativo en los costos y en la confiabilidad. El mantenimiento se puede entender como aquella combinación de las acciones técnicas y administrativas, que incluyen supervisión, y que son destinadas a retener un producto o mantenerlo en un estado en el que pueda realizar la función para lo que fue diseñado (Parida & Kumar, 2006). En la actualidad hay una evolución de las técnicas debido a por ejemplo el internet de las cosas, tecnología de detección, inteligencia artificial, etc., donde se ha reflejado una transición de las estrategias de mantenimiento correctivo hacia el mantenimiento preventivo y al mantenimiento predictivo (Ran et al., 2019).

De acuerdo con (Susto et al., 2015) En la gestión del mantenimiento existen tres principales categorías que, en orden de complejidad y eficiencia son las siguientes:

- I. Run-to-Failure (R2F): el mantenimiento se realiza posteriormente a la ocurrencia de fallas. Es el enfoque más simple para gestionar el mantenimiento, sin embargo, es el menos efectivo, debido a que el costo de la intervención y el tiempo de inactividad provocado después de la falla llegan a ser mucho más sustanciales que los asociados con las acciones correctivas planificadas.
- II. Mantenimiento preventivo (PvM): Las acciones de mantenimiento se realizan de acuerdo con un cronograma planificado que se basa en iteraciones de tiempo o proceso. Con este enfoque, generalmente se evitan fallas, pero con frecuencia se llegan a realizar acciones correctivas que no eran necesarias, lo que lleva a un uso ineficiente de recursos y mayores costos operativos.
- III. Mantenimiento predictivo (PdM): El mantenimiento se lleva a cabo con base en una estimación del estado de una pieza de equipo. Este tipo de mantenimiento permite la detección anticipada de fallas y por ello es posible realizar intervenciones oportunas antes de que ocurran las fallas.

El mantenimiento predictivo es una serie de actividades que buscan detectar cambios en la condición física de los equipos con el propósito de realizar los trabajos de mantenimiento necesarios que permitan maximizar la vida útil de los equipos y disminuir el riesgo de falla. Este se clasifica en dos tipos de acuerdo con los métodos de detección de los síntomas de falla: (1) mantenimiento predictivo basado en estadísticas y (2) mantenimiento predictivo basado en condiciones. El mantenimiento

predictivo basado en estadísticas (SBM por sus siglas en inglés) depende de los datos estadísticos del registro de los momentos de paro de los productos y componentes en la planta con el fin de desarrollar modelos que puedan predecir fallas, mientras que el mantenimiento predictivo basado en condiciones (también llamado mantenimiento basado en condiciones, CBM por sus siglas en inglés) depende de las condiciones de monitoreo continuo del equipo para detectar los síntomas de falla y tomar decisiones para el mantenimiento (Wang, 2016).

3. METODOLOGIA

En este capítulo se presenta el contexto donde se aplicará el modelo de degradación por medio del modelo de rangos medios, así como los pasos para su desarrollo y estimación de parámetros.

3.1. Materiales

Dentro del proceso de soldadura de terminales en cableado, se analiza el comportamiento de la resistencia al jalón para determinar el ciclo de vida de la herramienta utilizada en dicho proceso. La información de los valores recabados para este análisis los ha proporcionado una industria del sector automotriz de Ciudad Juárez, solo teniendo acceso a estos datos para presentar como resultado el tiempo de cambio de la herramienta. Se establece en este estudio que los datos son la medición de una característica del desempeño del proceso, considerada como una degradación que se observa a través del uso de la herramienta de soldado. Este análisis se desarrolla mediante un análisis de no paramétrico.

A continuación, la Tabla 3.1 muestra los datos de la resistencia al jalón, tomados durante diez días del proceso.

Tabla 3.1. Datos de la resistencia al jalón

Día	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Día	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Día	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3
1	4093	4180	4240	5	4184	2949	4116	8	3392	3687	3626
1	4257	4202	4274	5	3619	5013	4630	8	3447	3684	3645
1	4212	4156	4351	5	3619	5013	3875	8	2365	2658	3254
1	4184	4140	4187	5	1759	3647	4630	8	3649	2774	3717
1	4027	4042	4042	5	1625	2356	3658	8	3076	3085	3761
1	4051	4094	4070	5	3281	3082	3641	8	3680	3839	3287
1	4087	4046	4107	5	3645	2884	4025	8	3807	2899	3373
1	4136	4051	4037	5	4040	4037	3600	8	2569	3265	4568
1	4066	4068	4073	5	4067	4030	4033	8	1252	1365	3201
2	4158	3634	4076	6	3268	3947	3518	9	3669	3414	4037
2	4148	4167	4048	6	4060	3805	4076	9	3343	3322	4057
2	4130	4052	4050	6	3388	3344	4036	9	2740	3118	4035
2	4098	3973	4160	6	3876	4036	3761	9	3625	3836	4837
2	3991	3988	3624	6	3824	3610	4052	9	3140	4106	3182
2	4149	4091	4091	6	3182	4075	4059	9	2743	3775	4031
2	3891	4052	4116	6	4132	4084	4003	9	3496	3453	2987
2	3936	4106	4050	6	3853	4055	3610	9	3939	3994	4013
2	4046	3858	3567	6	3951	4101	4131	9	3628	3967	4019
3	4341	4160	3712	7	4209	3810	4333	10	1739	3525	3251
3	5115	4120	4706	7	4361	5427	4525	10	3734	3125	3438
3	4264	4746	4441	7	3478	3533	3789	10	4058	4101	4100
3	3811	4340	4270	7	2670	3661	3973	10	4885	5480	5102
3	4570	4245	4561	7	4038	4349	4036	10	5139	5309	4863
3	5072	4472	4194	7	4570	3814	4270	10	5321	2321	2364
3	5458	4187	4743	7	3647	3752	3660	10	1252	1532	5689
3	3730	3533	3860	7	3217	3730	3650	10	3027	4062	2369
3	4147	3278	4160	7	3140	3304	4318	10	2927	4052	2830
4	4132	4197	4604								
4	4320	3860	4270								
4	4153	4202	4289								
4	3266	4416	4373								
4	4076	4665	4053								
4	4044	4124	4128								
4	4676	3856	3507								
4	3895	4076	4065								
4	2636	3656	3445								

Como parte de los análisis iniciales, se observa el comportamiento de los datos mediante un análisis gráfico para observar la tendencia. En las Figuras que se muestran en 3.1, se puede observar una tendencia descendente, para cada una de las muestras respectivamente.

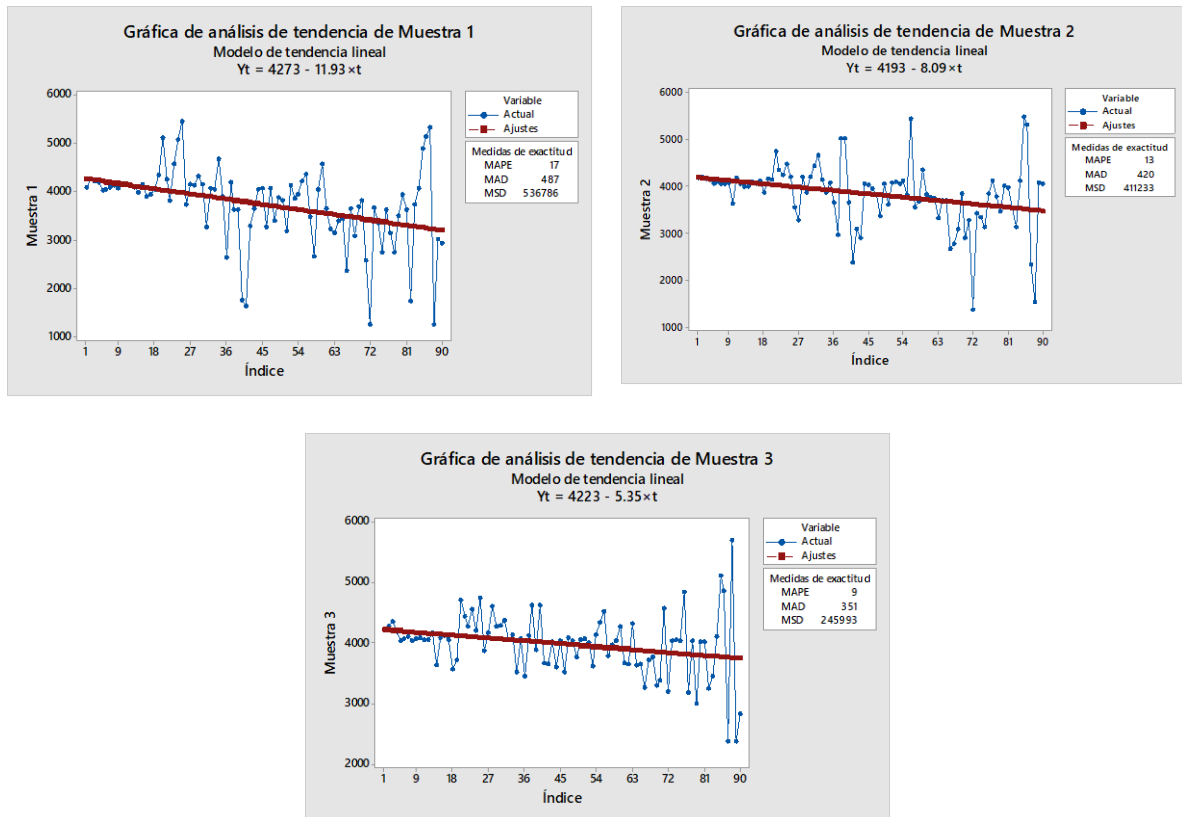


Figura 3.1. Gráficos de análisis de tendencia muestra 1, 2 y 3

Así mismo, se realiza un análisis de varianza para validar la significancia de algunas de las variables relacionadas con la resistencia al jalón, como lo son el tiempo de soldadura y la distancia absoluta. En la Tabla 3.2 se muestran parte de los datos recabados de las variables.

Tabla 3.2. Datos de las variables predictoras y la variable de respuesta

	Y's	X's Predictores	
Muestra no.	Resistencia al jalón	Tiempo de Soldadura	Distancia Absoluta
1	4093	69.28	82.7907
2	4257	69.13	80.9641
3	4212	69.23	79.8424
4	4184	69.3	80.7047
5	4027	69.39	81.8282
6	4051	69.33	81.2974
7	4087	69.37	81.5881
8	4136	69.34	80.7134
9	4066	69.37	82.7522
10	4180	69.27	81.4091

La Tabla 3.3 muestra el análisis de varianza donde se observa mediante el valor p que las variables, tiempo de soldadura y la distancia absoluta tienen una relación lineal significativa con la resistencia al jalón.

Tabla 3.3. Análisis de Varianza

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados Ajust.	Media de Cuadrados Ajust.	Valor F	Valor p
Regresión	3	42360152	14120051	37.83	0
Tiempo de Soldadura	1	2713169	2713169	7.27	0.007
Distancia Absoluta	1	2911199	2911199	7.8	0.006
Tiempo de Soldadura*Distancia Absoluta	1	2923671	2923671	7.83	0.006
Error	266	99296297	373294		
Total	269	141656449			

Considerando un nivel de significancia (α) de 5%, y siendo el valor p de cada una de sus variables, así como el de su interacción menor a α , se concluye que las variables de tiempo

de soldadura, la distancia absoluta y su interacción, tienen efectos significativos en la variable de respuesta de la resistencia al jalón.

En la Tabla 3.4 se realiza un resumen de los coeficientes del modelo lineal de regresión, así como del ajuste del modelo mediante el coeficiente de determinación de los datos analizados.

Tabla 3.4. Resumen del modelo lineal de regresión y coeficiente de determinación

Término	Coeficiente	EE del coef.	Valor T	Valor p	VIF
Constante	-1096852	409106	-2.68	0.008	
Tiempo de Soldadura	15799	5860	2.7	0.007	8604.31
Distancia Absoluta	13914	4982	2.79	0.006	32042.38
Tiempo de Soldadura*Distancia Absoluta	-199.7	71.4	-2.8	0.006	64760.7
Resumen del modelo	S	R-cuad	R-cuad. (ajustado)	R-cuad. (pred)	Valor $p < \alpha$
	610.978	29.90%	29.11%	27.58%	
Ecuación de regresión	Resistencia al jalón = -1096852 + 15799 tiempo de soldadura + 13914 Distancia Absoluta - 199.7 tiempo de soldadura*Distancia Absoluta				

3.2. Análisis mediante métodos no paramétricos

O'Connor & Keyner (2012), mencionan que para trazar la variable que es de interés, tal como el tiempo, millas, ciclos o alguna otra, en conjunto con el porcentaje de probabilidad acumulado, es necesario que los datos sean ordenados y obtener la probabilidad acumulada de cada uno de los datos. El método de rangos medianos se utiliza si se conoce que los datos, no se comportan de acuerdo con una distribución normal. La aproximación de Benard se utiliza para calcular los rangos medianos mediante la ecuación 3.1.

$$\hat{F}(x) = \frac{j - 0.3}{N + 0.4} \quad (3.1)$$

Para obtener la estimación de los parámetros, se calcula de acuerdo con el principio de los mínimos cuadrados a través del método de Regresión de Rango (Rank Regression). Con el modelo de regresión, es necesario obtener un estimador para la función acumulada de falla $F(x)$, este se obtiene mediante el cálculo del método no paramétrico de rangos medianos. Este es un estimador no paramétrico basado en el orden de falla, lo que implica que los datos deben organizarse en forma ascendente. De acuerdo con Genschel & Meeker (2010), primero se deben ordenar todo el conjunto de datos, del más pequeño al más grande.

Para el análisis mediante el método no paramétrico se decide utilizar la distribución Weibull de dos parámetros de acuerdo a la ecuación de la distribución de probabilidad acumulada $F(t)$.

$$F(t) = 1 - \exp\left[\left(-\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

Linealizando esta función, se obtiene

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - F(t)} \right] = \beta \ln(t) - \beta \ln \alpha \quad (3.3)$$

la cual es una ecuación lineal de la forma

$$y = \beta x + b \quad (3.4)$$

donde

$$y = \ln \ln \left[\frac{1}{1 - F(t)} \right] \quad (3.5)$$

$$x = \ln(t) \quad (3.6)$$

y

$$b = -\beta \ln(\alpha) \quad (3.7)$$

Para obtener la confiabilidad del análisis se aplica:

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

Se hace uso del software estadístico Minitab y Rstudio para realizar el análisis de los datos de degradación y presentar los resultados en la siguiente sección. La serie de códigos utilizados en el análisis se muestran en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5. Resumen del código de software Rstudio

Descripción	Código en Rstudio
Datos ordenados de menor a mayor	Datord<- order(Datos, decreasing = FALSE)
Etiquetar en una variable Y	Y<- Datos[Datord]
Presentación de los datos en un histograma	hist(Datos)
Método de los rangos medianos	r<-1:270 n<-length(r) F<-(r-0.3)/(n+0.4)
Presentación de tabla con información obtenida	Tabla<-data.frame(Y,r,n,F)
Modelo de Regresión	y<- log(log((1/(1-F)))) x<-log(Datos) Mod1<- lm(y ~ x) Mod2<- lm(x ~ y)

En el siguiente capítulo se presentan los resultados derivados de este caso de estudio.

4. RESULTADOS

En este capítulo se describen los principales resultados del análisis de los datos de la degradación de la herramienta utilizada en el proceso de soldadura por ultrasonido, se caracterizan los parámetros de la distribución de vida iniciando con la aplicación del método no paramétrico de los rangos medios y posteriormente con el análisis estadístico paramétrico de la distribución Weibull.

Los datos incluidos y analizados en este documento son el resultado de mediciones de resistencia a la tensión de un proceso de soldadura de contacto, donde el electrodo sufre un proceso de degradación, lo que genera una disminución en la resistencia a la tensión de las piezas soldadas. El proceso de análisis de la información se lleva a cabo utilizando un método no paramétrico, el cual se muestra en la sección siguiente, la Tabla 4.1 contiene una muestra de los datos de la variable de respuesta definida como la resistencia a la tensión o jalón.

Tabla 4.1. Datos de la prueba de Resistencia a la Tensión (Fuerza)

4093	4257	4212	4184	4027	4051	4087	4136	4066	4180	4202	4156	4140	4042	4094
4046	4051	4068	4240	4274	4351	4187	4042	4070	4107	4037	4073	4158	3634	4076
4148	4167	4048	4130	4052	4050	4098	3973	4160	3991	3988	3624	4149	4091	4091
3891	4052	4116	3936	4106	4050	4046	3858	3567	4341	4160	4712	5115	4120	4706
4264	4746	4441	4811	4340	4270	4570	4245	4561	5072	4472	4194	5458	4187	4743
3730	3533	3860	4147	3278	4160	4132	4197	4604	4320	3860	4270	4153	4202	4289
3266	4416	4373	4076	4665	4053	4044	4124	4128	4676	3856	3507	3895	4076	4065
2636	3656	3445	4184	2949	4116	3619	5013	4630	3619	5013	3875	1759	3647	4630
1625	2356	3658	3281	3082	3641	3645	2884	4025	4040	4037	3600	4067	4030	4033
3268	3947	3518	4060	3805	4076	3388	3344	4036	3876	4036	3761	3824	3610	4052
3182	4075	4059	4132	4084	2003	3853	4055	3610	3951	4101	4131	4209	3810	4333

4.1. Aplicación del Método de Rangos Medianos y Método Paramétrico

En esta sección se desarrolla la aplicación del método estadísticos no paramétricos, donde se utiliza el método de rangos medianos para obtener la distribución de probabilidad acumulada $F(x)$. Los cálculos se realizan mediante códigos de programación del software R en su versión 3.6.3, a continuación, se muestran los pasos que se siguen para la obtención de información del análisis de los datos.

1. Introducción de los datos de falla (Tabla 4.1).

$datos <- c(4093, 4257, 4212, \dots, \dots, 2830)$

2. Generación de secuencias.

$$r < -1:270$$

3. Obtención de la longitud del vector.

$$n < -length(r)$$

4. Cálculo de los rangos medianos (\hat{F}).

$$\hat{F} < - (r - 0.3)/(n + 0.4)$$

Con este paso se concluye con la aplicación de la modelación no paramétrica y continuando con el análisis de los datos corresponde realizar los pasos siguientes donde se realiza la modelación mediante estadísticos paramétricos.

5. Cálculo del vector x.

Asumiendo que los datos de degradación siguen una distribución Weibull, se tiene que la distribución de probabilidad acumulada es:

$$F(t) = 1 - \exp\left[\left(-\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0$$

de donde se obtiene

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - F(t)} \right] = \beta \ln(t) - \beta \ln \alpha$$

Si se considera el modelo general de regresión lineal, la ecuación lineal tiene la forma

$$y = ax + b$$

Donde

$$y = \ln \ln \left[\frac{1}{1-F(t)} \right], \quad x = \ln(t), \quad b = -\beta \ln(\alpha)$$

El vector graficado en el eje de las x será

$$x < -\ln \ln \left[\frac{1}{1-F(t)} \right]$$

6. Formación del cuadro de información con los datos (Y, r, n F)

Siguiendo el Código en el software Rstudio con datos ordenados de forma ascendente se obtiene la información del rango mediano, en la Tabla 4.2 se observa una muestra de los datos obtenidos.

Tabla 4. 2. Muestra de los valores F calculados

No.	Y	r	N	F	No.	Y	r	n	F
1	2106	1	270	0.00258876	18	2427	18	270	0.06545858
2	2106	2	270	0.00628698	19	2480	19	270	0.06915681
3	2136	3	270	0.00998521	20	2532	20	270	0.07285503
4	2137	4	270	0.01368343	21	2569	21	270	0.07655325
5	2139	5	270	0.01738166	22	2625	22	270	0.08025148
6	2168	6	270	0.02107988	23	2636	23	270	0.0839497
7	2201	7	270	0.02477811	24	2658	24	270	0.08764793
8	2206	8	270	0.02847633	25	2670	25	270	0.09134615
9	2252	9	270	0.03217456	26	2689	26	270	0.09504438
10	2265	10	270	0.03587278	27	2740	27	270	0.0987426
11	2309	11	270	0.03957101	28	2743	28	270	0.10244083
12	2319	12	270	0.04326923	29	2759	29	270	0.10613905
13	2321	13	270	0.04696746	30	2774	30	270	0.10983728
14	2356	14	270	0.05066568	31	2830	31	270	0.1135355
15	2364	15	270	0.05436391	32	2837	32	270	0.11723373
16	2365	16	270	0.05806213	33	2884	33	270	0.12093195
17	2369	17	270	0.06176036	34	2899	34	270	0.12463018

7. Obtención de los parámetros de la función de densidad de probabilidad.

En la Tabla 4.3 se encuentran los resultados del modelo lineal realizado mediante el software Rstudio, en él se obtienen sus coeficientes, estos son utilizados para la obtención de los parámetros de forma (β) y de escala (α) de la distribución Weibull. En la Figura 4.1 se observa el análisis lineal del ajuste de los datos obtenidos previamente mediante el método de rangos medianos, linealizando la CFD Weibull.

Tabla 4.3. Resultados del modelo de regresión

Coeficientes:		Residuales				
		Min.	1Q	Mediana	3Q	Max.
		-1.78622	-0.18879	-0.02537	0.17898	0.65484
Variable	Estimación	Error Estándar	Valor t	Pr(> t)	Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1	
(Intercepto)	53.68500	-0.64641	-83.05	<2e-16 ***		
X	6.47052	0.07873	82.19	<2e-16 ***		
Error estándar residual: 0.2474 con 268 grados de libertad.						
R ² Múltiple: 0.9618, R ² , Ajustada: 0.9617						
Estadístico F: 6755 con 1 y 268 g.l., valor -p: < 2.2e-16						

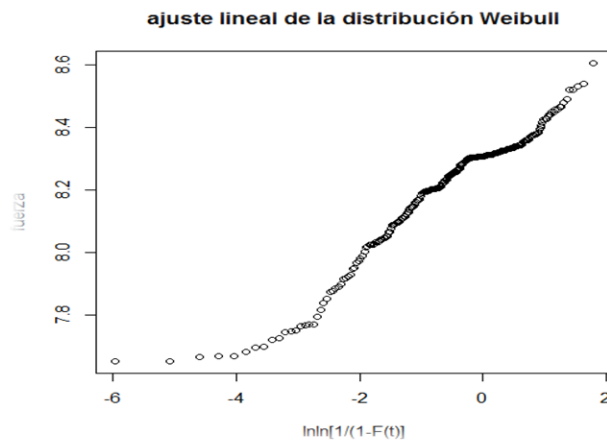


Figura 4.1. Ajuste lineal de la Distribución Weibull

De los resultados mostrados en la Tabla 3, el valor del intercepto es $b = -53.685$ y el valor de la pendiente $\beta = 6.471$. Con estos valores de los coeficientes, se realizan los cálculos para obtener los parámetros de la distribución Weibull:

$$\ln \alpha = b = 53.685$$

$$\beta = 6.471$$

$\ln \alpha = \frac{b}{\beta} = \frac{53.685}{6.471} = 8.296$, por lo tanto, el parámetro de escala α es

$$\alpha = e^{8.296} = 4007.8$$

La función de densidad de probabilidad de la distribución Weibull ecuación (4) es:

$$f(x) = 0.001615 \left(\frac{x}{4007.8}\right)^{6.471} e^{-\left(\frac{x}{4007.8}\right)^{6.471}}$$

La función de confiabilidad es:

$$R(x) = e^{-\left(\frac{x}{4007.8}\right)^{6.471}}$$

La tasa de riesgo o función de riesgo se puede ser escrita como sigue:

$$h(x) = 0.001615 \left(\frac{x}{4007.8}\right)^{6.471}$$

El valor esperado será

$$E(x) = 4007.8 \Gamma\left(1 + \frac{1}{6.471}\right) = 4007.8(0.9298) = 3726.45 N$$

La varianza estará dada aproximadamente por

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (4007.8)^2 \left\{ \Gamma(1.31) - (\Gamma(1.15))^2 \right\} = (4007.8)^2 \{ (0.896) - (0.9298)^2 \} \\ &= 505517.125 \end{aligned}$$

con $\sigma = 711.0 N$

Como se puede observar, se obtiene un tiempo promedio para la falla (MTTF) o valor esperado de 3726.45 N

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se realizan las principales conclusiones que se pueden observar mediante los resultados y el planteamiento de esta investigación, como así mismo se realizan algunas recomendaciones y posibles investigaciones futuras.

5.1. Conclusiones

Los departamentos de mantenimiento en la industria maquiladora de Cd. Juárez, proporcionan mantenimiento a equipos argumentando utilizar MPT (Mantenimiento Productivo Total), el cual consiste en mantenimiento correctivo, mantenimiento preventivo y mantenimiento predictivo. La realidad es que la mayoría de los mantenimientos ofrecidos es mantenimiento correctivo. De alguna manera, programados en función del personal con que cuentan, proporcionan mantenimiento preventivo. El mantenimiento predictivo requiere aplicación de conceptos diferentes, ya que el enfoque básico es anticiparse a la falla. De inicio, deberá conocerse el comportamiento de los tiempos de falla, para así definir la función de densidad de probabilidad y obtener el MTTF o valor esperado y la tasa de riesgo. El objetivo principal fue determinar el tiempo de cambio de la herramienta (ANVIL) para asegurarse que las piezas soldadas cumplieran con el valor especificado, es decir, anticiparse a la falla. El concepto utilizado fue usar datos de degradación para evaluación de la confiabilidad.

La obtención de la función de densidad de probabilidad se podría obtener directamente usando un software como Minitab® o Weibull++ de Reliasoft, sin

embargo, se consideró utilizar un método no paramétrico, el cual utiliza una ordenación de los rangos, usado también para la generación de papel de probabilidad, en este caso Weibull.

El objetivo planteado para la caracterización de la función de densidad de probabilidad se logra con el análisis de datos de degradación de la herramienta (ANVIL) obteniendo una función que nos permite observar el comportamiento de la resistencia a la tensión y determinar el cambio oportuno de la herramienta previo a ocasionar fallas en los productos soldados.

De acuerdo con la hipótesis y las preguntas de investigación se determinó lo siguiente:

Se determina el modelo estadístico que permite caracterizar la confiabilidad de la herramienta mediante la distribución Weibull, donde el parámetro de escala es de 4007.8 y el parámetro de forma es 6.471. El comportamiento de la distribución de la resistencia a la tensión muestra que la herramienta deberá ser retirada antes de las 270 piezas soldadas, sin riesgo de que aparezcan resistencias menores al límite inferior especificado de 2000 lbs/plg². El valor esperado fue de 3726.45 N con una desviación estándar de 711 N.

Es importante comentar que el uso de esta metodología donde se ha realizado el análisis de los datos de degradación mediante la medición de la resistencia al jalón, se contribuye a implementar acciones de mantenimiento industrial, específicamente en los cambios de la herramienta usada para la soldadura de las terminales en los

cables, esto es considerado como una alternativa del mantenimiento predictivo que permite tomar decisiones acertadas considerando el comportamiento del desgaste de la herramienta en el proceso de soldadura, antes de que sucedan situaciones indeseables como lo son los productos con defecto que lleguen al cliente final, tiempos muertos en las estaciones de trabajo, los re-trabajos para dar solución a las piezas trabajadas o piezas que deban ser desechadas, con el incremento en los costos del proceso de manufactura, así como en el prestigio de la empresa.

Los resultados que la empresa reporta con la realización e implementación de este análisis de los datos en el proceso de soldadura por ultrasonido se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Beneficios de la implementación del cambio de herramienta (ANVIL)

Beneficio	Resultados
1.- Reducción en el tiempo de ciclo del proceso de soldadura	5%
2.- Ahorro debido a la reducción en el desperdicio y en los re-trabajos	\$270,000.00 dólares anuales
3.- Actualización de procedimientos de mantenimiento	Realizados
4.- Mejora en la capacidad de proceso Cpk	De 0.9 a 1.3

5.2. Recomendaciones

Se considera importante extender esta investigación hacia otros procesos de la empresa, donde se siga evaluando la efectividad en los resultados. Así mismo, otras áreas que sería recomendable explorar es el de redes bayesianas, modelos de degradación con procesos estocásticos y la aplicación algoritmos de Machine

Learning para la predicción de los eventos de falla. Otras áreas de investigación para el futuro es realizar trabajo sobre el mantenimiento centrado en confiabilidad aplicando otras técnicas estadísticas.

En este trabajo no se consideran los planes de prueba, sin embargo, sería recomendable realizar el diseño de una prueba controlada para obtener nuevos datos y hacer comparaciones con los resultados del análisis presentado.

6. Referencias

- Ahmed, J. U. (1996). Modern approaches to product reliability improvement. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 13(3), 27–41.
<https://doi.org/10.1108/02656719610116063>
- Awad, M. (2016). Economic allocation of reliability growth testing using Weibull distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, 152, 273–280.
<https://doi.org/10.1016/j.ress.2016.03.012>
- Bagdonavičius, V., & Nikulin, M. S. (2000). Estimation in Degradation Models with Explanatory Variables. *Lifetime Data Analysis*, 7(1), 85–103.
<https://doi.org/10.1023/A:1009629311100>
- Bordes, L., Paroissin, C., & Salami, A. (2010). Combining Gamma and Brownian processes for degradation modeling in presence of explanatory variables. *Hal-00535812*, July.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00535812/>
- Chen, Z., & Zheng, S. (2005). Lifetime distribution based degradation analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, 54(1), 3–10. <https://doi.org/10.1109/TR.2004.837519>
- Chhikara, A. R. S., & Folks, J. L. (1977). The Inverse Gaussian Distribution as a Lifetime Model. *Technometrics*, 19(4), 461–468.
- Choi, H. S., Seo, W. S., & Choi, D. K. (2011). Prediction of reliability on thermoelectric module through accelerated life test and Physics-of-failure. *Electronic Materials Letters*, 7(3), 271–275. <https://doi.org/10.1007/s13391-011-0917-x>
- Collins, D., & Freels, J. (2013). Accelerated Test Methods for Reliability Prediction. *Journal of Quality Technology*, 45(3), 244–259.
- Condra, L. (2001). *Reliability Improvement with Design of Experiment*.
- Cui, H. (2005). Accelerated temperature cycle test and Coffin-Manson model for electronic packaging. *Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2005. Proceedings.*, 556–560. <https://doi.org/10.1109/RAMS.2005.1408421>
- Elsayed, E. A. (2012). Overview of reliability testing. *IEEE Transactions on Reliability*, 61(2), 282–291. <https://doi.org/10.1109/TR.2012.2194190>
- Escobar, L. a., & Meeker, W. Q. (2007). A Review of Accelerated Test Models. *Statistical Science*, 21(4), 552–577. <https://doi.org/10.1214/088342306000000321>
- Escobar, L. A., Villa, E. R., & Yañez, S. (2003). Confiabilidad: Historia, Estado del Arte y Desafíos Futuros. *Dyna*, 70(140), 5–21.

- Escobar, Luis A., Meeker, W. Q., Kugler, D. L., & Kramer, L. L. (2003). Accelerated Destructive Degradation Tests : Data , Models , and Analysis. In *Mathematical and Statistical Methods in Reliability*: pp. 319-337 (Issue August 2009, pp. 319–337). <https://doi.org/10.1142/9789812795250>
- Escobar R. Luis A.; Villa D., Enrique R.; Yañez C., S. (2003). Confiabilidad: Historia, Estado Del Arte Y Desafios Futuros. *Dyna*, 140, 5–21. <https://doi.org/0012-7353>
- Evans, J., & Lindsay, W. (2008). *Administración y control de la calidad*.
- Fan, Z.-Y., Ju, H., & Sun, F.-B. (2015). Improved Gamma Process for Degradation Analysis Under Nonlinear Condition. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 22(06), 1550030. <https://doi.org/10.1142/S0218539315500308>
- Firdos, M., Abbas, K., Ahmed Abbasi, S., & Yousaf Abbasi, N. (2020). Modeling and Comparison of Maximum Likelihood and Median Rank Regression Methods With Fréchet Distribution. *Proceedings on Engineering Sciences*, 2(2), 159–168. <https://doi.org/10.24874/pes02.02.006>
- Freitas, M. A., Colosimo, E. A., Santos, T. R. Dos, & Pires, M. C. (2010). Reliability assessment using degradation models: bayesian and classical approaches. *Pesquisa Operacional*, 30(1), 195–219. <https://doi.org/10.1590/S0101-74382010000100010>
- Genschel, U., & Meeker, W. Q. (2010). A Comparison of Maximum Likelihood and Median-Rank Regression for Weibull Estimation. *Quality Engineering*, 22, 236–255. <https://doi.org/10.1080/08982112.2010.503447>
- Guo, H., & Liao, H. (2012). Methods of reliability demonstration testing and their relationships. *IEEE Transactions on Reliability*, 61(1), 231–237. <https://doi.org/10.1109/TR.2011.2167782>
- Huang Peng, Q., Liu, T., Sun, Q., & Huang, W. (2016). Reliability estimation for aluminum alloy welded joint with automatic image measurement of surface crack growth. *Engineering Computations*, 33(4), 1205–1223. <https://doi.org/10.1108/EC-04-2015-0092>
- Huang, S.-J., & Pai, F.-S. (2002). Design and Operation of Burn-In Test System for. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, 49(1), 256–263.
- Jiménez Hernández, J. d. C., Alamilla López N. E. & López Cerino, M. (2009). Pruebas de vida acelerada en confiabilidad. *Ciencia y Tecnología*, 13, 33–37.
- Kharoufeh, J. P., & Cox, S. M. (2005). Stochastic models for degradation-based reliability. *IIE Transactions*, 37(6), 533–542. <https://doi.org/10.1080/07408170590929009>
- Lawless, J. (2000). Statistics in Reliability. *Journal of the American Statistical Association*,

- 95(451 (Sep., 2000)), 989–992. <https://doi.org/10.1080/01621459.2000.10474291>
- Lawless, J., & Crowder, M. (2004). Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure. *Lifetime Data Analysis*, 10(3), 213–227. <https://doi.org/10.1023/B:LIDA.0000036389.14073.dd>
- Lee, Y. L., Makam, S., McKelvey, S., & Lu, M. W. (2015). Durability Reliability Demonstration Test Methods. *Procedia Engineering*, 133, 31–59. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.621>
- Li, Q., & Kececioglu, D. B. (2006). Design of an optimal plan for an accelerated degradation test: a case study. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 23(4), 426–440. <https://doi.org/10.1108/02656710610657611>
- Ling, M. H., Tsui, K. L., & Balakrishnan, N. (2015). Accelerated degradation analysis for the quality of a system based on the gamma process. *IEEE Transactions on Reliability*, 64(1), 463–472. <https://doi.org/10.1109/TR.2014.2337071>
- Liu, T., Sun, Q., Pan, Z., Feng, J., & Tang, Y. (2016). Irregular Time-Varying Stress Degradation Path Modeling: a Case Study on Lithium-ion Cell Degradation. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(5), 1889–1902. <https://doi.org/10.1002/qre.1920>
- Liu, Z., Ma, X., Yang, J., & Zhao, Y. (2014). Reliability modeling for systems with multiple degradation processes using inverse Gaussian process and copulas. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/829597>
- Lu, C. J., & Meeker, W. Q. (1993). Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution. *Technometrics*, 35(2), 161–174. <https://doi.org/10.2307/1269661>
- Lu, J.-C., Park, J., & Yang, Q. (1997). Statistical Inference of a Time-to-Failure Distribution Derived From Linear Degradation Data. *Technometrics*, 39(4), 391–400. <https://doi.org/10.1080/00401706.1997.10485158>
- Math-blocs, R. C. O. N. O. (n.d.). *Fiabilidad (Vi): Tests De Vida Acelerada*. Vi, 1–7.
- McCluskey, E. J. (1985). Built-In Self-Test Techniques. *IEEE Design and Test of Computers*, 2(2), 21–28. <https://doi.org/10.1109/MDT.1985.294856>
- Meeker, W., Escobar, L. A., & Lu, C. J. (2015). *Accelerated Degradation Tests : Modeling and Analysis Accelerated Degradation Tests : Modeling and Analysis*. 1706(October). <https://doi.org/10.1080/00401706.1998.10485191>
- Meeker, W. Q. (2001). RELIABILITY : THE OTHER DIMENSION OF QUALITY W . J . Youden Memorial Address. *ASQ STATISTICS DIVISION NEWSLETTER*, Vol. 21, No. 2, 21(2).

- Meeker, W. Q. (2010). Trends in the Statistical Assessment of Reliability. *Advances in Degradation Modeling*, 3–16. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4924-1_1
- Meeker, W. Q., Escobar, L. a, & Lu, C. J. (1998). Accelerated Degradation Tests: Modeling and Analysis. *Technometrics*, 40(2), 89–99.
<https://doi.org/10.1080/00401706.1998.10485191>
- Misra, K. B. (2008). Reliability Engineering: A Perspective. *Handbook of Performability Engineering*, October, 253–289.
- Morris, G. K. (2017). Taking the (Emotional) Stress Out of HALT. *Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/RAM.2017.7889745>
- Nelson, W. (1981). Analysis of Performance-Degradation Data from Accelerated Tests. *IEEE Transactions on Reliability*, R-30(2), 149–155.
<https://doi.org/10.1109/TR.1981.5221010>
- Nelson, W. B. (2004). Accelerated Testing- Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis. In *John Wiley & Sons, Inc.*
- Neuhäuser, M. (2011). Nonparametric statistical tests: A computational approach. In *Nonparametric Statistical Tests: A Computational Approach*.
- O'Connor, P. D. T. ., & Keyner, A. (2012). *Practical Reliability Engineering* (5th.). John Wiley & Sons.
- Olteanu, D., & Freeman, L. (2010). The evaluation of median-rank regression and maximum likelihood estimation techniques for a two-parameter Weibull distribution. *Quality Engineering*, 22(4), 256–272. <https://doi.org/10.1080/08982112.2010.505219>
- Pan, Z., & Balakrishnan, N. (2010). Multiple-steps step-stress accelerated degradation modeling based on wiener and gamma processes. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 39(7), 1384–1402.
<https://doi.org/10.1080/03610918.2010.496060>
- Parida, A., & Kumar, U. (2006). Maintenance performance measurement (MPM): Issues and challenges. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 12(3), 239–251.
<https://doi.org/10.1108/13552510610685084>
- Park, C., & Padgett, W. J. (2005). *Accelerated Degradation Models for Failure Based on Geometric Brownian Motion and Gamma Processes*. 511–527.
<http://download.springer.com/static/pdf/29/art%253A10.1007%252Fs10985-005-5237-8.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Farticle%2F10.1007%2Fs10985-005-5237-8&token2=exp=1494506851~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F29%2Fart%25253A10.1007%2>

5252Fs10985-005-5237-

- Park, C., & Padgett, W. J. (2006). Stochastic degradation models with several accelerating variables. *IEEE Transactions on Reliability*, 55(2), 379–390.
<https://doi.org/10.1109/TR.2006.874937>
- Peng, C. Y., & Tseng, S. T. (2009). Mis-specification analysis of linear degradation models. *IEEE Transactions on Reliability*, 58(3), 444–455.
<https://doi.org/10.1109/TR.2009.2026784>
- Peng, W., Li, Y., Yang, Y., Mi, J., & Huang, H. (2017). *Bayesian Degradation Analysis With Inverse Gaussian Process Models Under Time-Varying Degradation Rates*. 66(1), 84–96.
- Pulido, H. gutiérrez, & Salazar, R. de la vara. (2013). *Control Estadístico de Calidad y Seis Sigma* (P. E. Roig (ed.); Tercera ed). McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- Ran, Y., Zhou, X., Lin, P., Wen, Y., & Deng, R. (2019). *A Survey of Predictive Maintenance: Systems, Purposes and Approaches*. XX(Xx), 1–36. <http://arxiv.org/abs/1912.07383>
- Roberto, J., Reza, D., Iván, M., Borbón, R., David, R., & Arredondo, M. (2005). *Culcyt // Ingeniería Industrial patrones Desarrollo de un plan de prueba para pruebas de vida acelerada en el sensor knock Introducción*. 55.
- Rodríguez-Picón, L.A., Rodríguez-Picón, A. P., Méndez-González, L. C., Rodríguez-Borbón, M. I., & Alvarado-Iniesta, A. (2017a). Degradation modeling based on gamma process models with random effects. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 0918(July). <https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1324981>
- Rodríguez-Picón, L.A., Rodríguez-Picón, A. P., Méndez-González, L. C., Rodríguez-Borbón, M. I., & Alvarado-Iniesta, A. (2017b). Degradation modeling based on gamma process models with random effects. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 0918(May). <https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1324981>
- Rodríguez-Picón, Luis A., Rodríguez Borbón, M. I., Valles-Rosales, D. J., & Flores Ochoa, V. H. (2016). Modelling degradation with multiple accelerated processes. *Quality Technology and Quantitative Management*, 13(3), 333–354.
<https://doi.org/10.1080/16843703.2016.1189202>
- Rodríguez-Picón, Luis Alberto, Flores-Ochoa, V. H., Méndez-González, L. C., & Rodríguez-Medina, M. A. (2017). Bivariate degradation modelling with marginal heterogeneous stochastic processes. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(11), 2207–2226. <https://doi.org/10.1080/00949655.2017.1324858>

- Sanchez, L. M., & Pan, R. (2011). An Enhanced Parenting Process: Predicting Reliability in Product's Design Phase. *Quality Engineering*, 23(4), 378–387.
<https://doi.org/10.1080/08982112.2011.603110>
- Shah, S., & Hasler, J. (2017). *Tuning of Multiple Parameters With a BIST System*. 1–9.
- Shi, Y., Escobar, L. a., & Meeker, W. Q. (2009). Accelerated Destructive Degradation Test Planning. *Technometrics*, 51(1), 1–13. <https://doi.org/10.1198/TECH.2009.0001>
- Singpurwalla, N. D. (1995). Survival in Dynamic Environments. *Statistical Science*, 10(1), 86–103. <https://doi.org/10.1111/j.1558-5646.2010.01056.ADA>
- Sun, F., Liu, L., Li, X., & Liao, H. (2016). Stochastic Modeling and Analysis of Multiple Nonlinear Accelerated Degradation Processes through Information Fusion. *Sensors*, 16(8), 1242. <https://doi.org/10.3390/s16081242>
- Susto, G. A., Schirru, A., Pampuri, S., McLoone, S., & Beghi, A. (2015). *Machine Learning for Predictive Maintenance : A Multiple Classifiers Queen ' s University Belfast - Research Portal Machine Learning for Predictive Maintenance : A Multiple Classifiers Approach*. 11, 812–820.
- Tang, L. C., Yang, G. Y., & Xie, M. (2004). Planning of step-stress accelerated degradation test. *Annual Symposium Reliability and Maintainability, 2004 - RAMS*, 287–292.
<https://doi.org/10.1109/RAMS.2004.1285462>
- Tobias, P. A., & Trindade, D. (2012). Weibull distribution. *Applied reliability. CRC Press, Boca Raton*, 87-113.
- Van Zyl, J. M., & Schall, R. (2012). Parameter estimation through weighted least-squares rank regression with specific reference to the Weibull and Gumbel distributions. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 41(9), 1654–1666.
<https://doi.org/10.1080/03610918.2011.611315>
- Wang, K. (2016). Intelligent Predictive Maintenance (IPdM) System – Industry 4.0 Scenario. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 113, 259-268.
<https://doi.org/10.2495/IWAMA150301>
- Wang, X., Jiang, P., Guo, B., & Cheng, Z. (2014). Real-time reliability evaluation with a general Wiener process-based degradation model. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(2), 205–220. <https://doi.org/10.1002/qre.1489>
- Wei, H., & Dietrich, D. L. (2005). An alternative degradation reliability modeling approach using maximum likelihood estimation. *IEEE Transactions on Reliability*, 54(2), 310–317.
- Wu, Q., Yang, J., Wang, J., & Xue, L. (2014). Reliability analysis of degradation with a new independent increment process. *Journal of Mechanical Science and Technology*,

- 28(10), 3971–3976. <https://doi.org/10.1007/s12206-014-0908-6>
- Xu, D., Chen, Y., & Kang, R. (2011). Study of accelerated stability test method for quartz flexible accelerometer. *IEEE Transactions on Device and Materials Reliability*, 11(1), 148–156. <https://doi.org/10.1109/TDMR.2010.2102025>
- Ye, Z.-S., & Chen, N. (2014). The Inverse Gaussian Process as a Degradation Model. *Technometrics*, 56(3), 302–311. <https://doi.org/10.1080/00401706.2013.830074>
- Ye, Z.-S., Xie, M., Tang, L.-C., & Shen, Y. (2012). Degradation-Based Burn-In Planning Under Competing Risks. *Technometrics*, 54(2), 159–168. <https://doi.org/10.1080/00401706.2012.676946>
- Ye, Z., Revie, M., & Walls, L. (2014). A load sharing system reliability model with managed component degradation. *IEEE Transactions on Reliability*, 63(3), 721–730. <https://doi.org/10.1109/TR.2014.2315965>
- Zhao, W., & Elsayed, E. a. (2005). A general accelerated life model for step-stress testing. *IIE Transactions*, 37(11), 1059–1069. <https://doi.org/10.1080/07408170500232396>