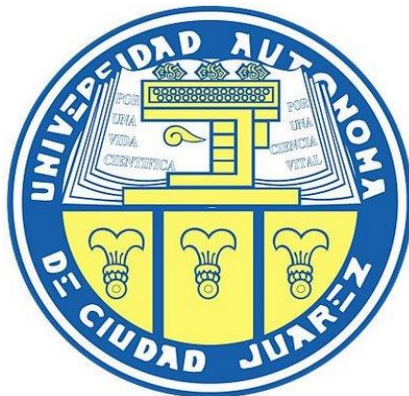


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Y DE MANUFACTURA**



**PRUEBAS DE VIDA ACELERADA: UNA APLICACIÓN A SELLOS
NEUMATICOS DE PISTÓN CON TRES ESTRESSES**

PROYECTO QUE PRESENTA
IVÁN DE JESÚS GARCÍA GARROBO

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERIA INDUSTRIAL

ASESOR
DR. MANUEL IVÁN RODRÍGUEZ BORBÓN

Dedicatoria

A mis padres:

María Dolores y Jesús Isabel por su incondicional apoyo en mi formación.

A mi familia:

En especial a mi amada esposa Rocío Paola y a mis hijos Karim, Ivan y Alexander por su sacrificio y comprensión, con su apoyo y aliento pude realizar este trabajo.

Agradecimientos

Al Instituto Tecnológico Superior de Nuevo Casas Grandes y a la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, ya que a través del convenio realizado puede hacer realidad una de mis metas personales.

Un especial agradecimiento a mi asesor, el Dr. Manuel Iván Rodríguez Borbón, por haberme brindado su tiempo. Agradezco su continua asesoría y el esfuerzo realizado para que este trabajo se pudiera concluir.

También agradezco a mis sinodales, Dr. Roberto Romero López y Dr. Rey David Molina Arredondo por sus valiosas aportaciones realizadas para mejorar este trabajo.

Gracias a al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada.

Índice

1.	Introducción.....	1
1.1	Antecedentes del problema.....	5
1.2	Planteamiento del problema.....	6
1.3	Hipótesis	7
1.4	Objetivos.....	7
	Objetivo general	7
	Objetivos específicos	7
1.5	Justificación	7
1.6	Alcances y delimitaciones	8
	Alcances	8
	Delimitaciones.....	9
2.	Marco teórico.....	10
2.1	Confiabilidad	10
2.1.1	Confiabilidad versus Calidad.....	11
2.1.2	La función de confiabilidad.....	11
2.1.3	Tiempo medio hasta el fallo (MTTF).....	15
2.1.4	La función de la tasa de falla	16
2.1.5	Tasa de riesgo acumulada.....	19

2.1.6 El p-cuantil	19
2.1.7 Relaciones y equivalencias	20
2.2 Distribuciones de probabilidad	21
2.2.1 La distribución exponencial	21
2.2.2 La distribución Weibull.....	25
2.2.3 La distribución Normal	32
2.2.4 La distribución lognormal	35
2.2.5 La distribución Gamma	38
2.3 Pruebas de vida acelerada(ALT)	41
2.3.1 Métodos de aceleración.....	42
2.3.2 Carga de estrés	43
2.3.3 Datos y tipos de datos	46
2.3.4 Modelos de relación vida-esfuerzo	50
3. Metodología.....	74
3.1 Diseño de la prueba.....	75
3.1.1 Unidades de prueba.....	75
3.1.2 Selección de las variables de estrés.....	75
3.1.3 Determinación de los niveles de prueba.....	76
3.1.4 Determinación del número de unidades de prueba	77

3.2 Recolección de datos	77
3.3 Selección del modelo de relación vida-esfuerzo	81
3.4 Estimación de parámetros	82
3.5 Caracterización	83
4. Resultados	87
5. Conclusiones y recomendaciones	92
Referencias	93

Índice de tablas

Tabla 2.1 Parámetros de la forma Weibull.	30
Tabla 2.2 Relación entre las distribuciones lognormal y normal.	37
Tabla 2.3 Efecto del parámetro γ en la función de tasa de riesgo.	40
Tabla 2.4 Transformaciones integradas.	57
Tabla 3.1 Condiciones de operación del sello neumático.	75
Tabla 3.2 Niveles por variable de estrés.	76
Tabla 3.3. Datos obtenidos durante las corridas.	78
Tabla 3.4 Resultado de la prueba de bondad y ajuste.	79
Tabla 3.5 Parámetros estimados en ALTA.	82
Tabla 3.6 MTTF calculado por ALTA.	84
Tabla 3.7 Confiabilidad a $t=21920$ calculado en ALTA.	84
Tabla 3.8 Percentil 10 calculado en ALTA.	85
Tabla 3.9 Percentiles obtenidos en ALTA.	86
Tabla 4.1. Tiempo medio hasta el fallo.	87
Tabla 4.2. Estimación del tiempo de fallo del 10 por ciento de los sellos.	87
Tabla 4.3 Estimación de la confiabilidad de los sellos neumáticos.	90

Índice de figuras

Figura 1.1 Clasificación de sellos que oferta Tracto Partes Agrícolas.....	4
Figura 1.2 Diferentes tipos de sellos utilizados en sistemas hidráulicos y neumáticos.	4
Figura 1.3 Tipos de sellos utilizados en un cilindro.....	5
Figura 1.4 Maquinado de sellos.	6
Figura 2.1 Probabilidad de supervivencia $R(t)$ como complemento de la probabilidad de fallo $F(t)$	13
Figura 2.2 La función de confiabilidad	14
Figura 2.3 La función de distribución acumulada.....	14
Figura 2.4 La función de densidad de probabilidad.....	14
Figura 2.5 Comparación de las medidas de tendencia central.....	16
Figura 2.6 Representación gráfica de la tasa de fallo.....	17
Figura 2.7 La función de confiabilidad exponencial.....	23
Figura 2.8 La función de distribución exponencial acumulada.....	24
Figura 2.9 La función de densidad de probabilidad exponencial.....	24
Figura 2.10 El efecto de β sobre la función de densidad de probabilidad Weibull.....	27
Figura 2.11 El efecto de β sobre la función de distribución acumulada Weibull.....	27
Figura 2.12 El efecto de β sobre la función de confiabilidad Weibull.....	27
Figura 2.13 El efecto de β sobre la curva de la tasa de riesgo Weibull.....	28

Figura 2.14 El efecto de θ sobre la función de densidad de probabilidad Weibull.....	28
Figura 2.15 El efecto de θ sobre la función de confiabilidad Weibull.	29
Figura 2.16 El efecto de θ sobre la curva de la tasa de riesgo Weibull.	29
Figura 2.17 El efecto de la desviación estándar σ sobre la función de densidad e probabilidad normal.	33
Figura 2.18 El efecto de la desviación estándar σ sobre la función de distribución acumulada normal.	33
Figura 2.19 El efecto de la desviación estándar σ sobre la tasa de riesgo.....	33
Figura 2.20 El efecto del parámetro de forma s sobre la función de densidad de probabilidad lognormal.....	36
Figura 2.21 El efecto del parámetro de forma s sobre la función de distribución acumulada	37
Figura 2.22 El efecto del parámetro de forma s sobre la curva de la tasa de riesgo lognormal.	37
Figura 2.23 El efecto del parámetro de forma sobre la función de densidad de probabilidad gamma. El parámetro de escala se ha fijado en 10.	40
Figura 2.24 El efecto del parámetro de forma sobre la tasa de riesgo gamma. El parámetro de escala se ha fijado en 10.....	41
Figura 2.25 Estrés constante en el tiempo	44
Figura 2.26 Carga de estrés paso a paso.....	45
Figura 2.27 Carga de estrés rampa.	45
Figura 2.28 Función continua de estrés lineal.	45

Figura 2.29 Función continua de estrés no lineal.....	46
Figura 2.30 Registro de fallos por unidad	47
Figura 2.31 Registro de unidades con censura a la derecha.	48
Figura 2.32 Registro de unidades con censura por intervalos.	48
Figura 2.33 Registro de unidades con censura por la izquierda.....	49
Figura 2.34 Representación de la vida en función del estrés.	50
Figura 2.35 Representación de la vida en función del estrés.	50
Figura 2.36 Relación vida-esfuerzo Arrhenius para una distribución Weibull con parámetros Beta=4.29, B=1861.61 y C=58.98	53
Figura 2.37 Grafico de la ecuación de la línea de la relación de la ley de la potencia inversa	55
Figura 3.1 Perfil UNP del sello de pistón con sello limpiador.	75

Resumen

El sello es una refacción imprescindible de los cilindros neumáticos y ampliamente utilizada en la automatización de la producción de cualquier sector industrial. El sello de pistón en un cilindro neumático produce energía que permite el movimiento de equipos y herramientas en un proceso donde se sujetan, elevan, arrastran, bajan y transportan objetos. Se realizaron Pruebas de Vida Acelerada (ALT, por sus siglas en inglés Accelerated Life Testing) a sellos neumáticos de pistón elaborados a base de poliuretano, un producto nuevo que lanzará al mercado la empresa Tracto Partes Agrícolas. Las pruebas se realizaron principalmente con el fin de conocer la vida media de este producto que aún se encuentra en la fase de prueba y establecer políticas de garantía que permitan a la compañía ofrecer al cliente un producto confiable. Para la prueba se corrió un diseño de experimentos factorial completo utilizando tres variables de estrés (temperatura, presión y velocidad de carrera) a tres niveles, en el que se utilizó el modelo de relación multivariable Log-Lineal General (GLL) para una distribución subyacente Lognormal. Para la estimación se utilizó como apoyo el software ALTA de la compañía ReliaSoft, el cual trabaja la relación vida-esfuerzo GLL para un máximo de ocho estreses.

Summary

The seal is an essential renovation of the pneumatic cylinders and widely used in the automation of the production of any industrial sector. The seal of piston in a pneumatic cylinder produces energy that allows the movement of equipment and tools in a process where they hold, lift, drag, drop and carry objects. Accelerated Life Testing (ALT) to pneumatic piston seals made of polyurethane, a new product that will launch the Tracto partes Agricolas company performed. The tests were conducted mainly in order to meet the mean life of this product that is still in the testing phase and establish security policies that allow the company to offer customers a reliable product. To test was run design full factorial experiments using three variables stress (temperature, pressure and running speed) at three levels, wherein the Multivariate relationship log-linear General (GLL) to an underlying distribution was used lognormal. For the estimation is used to support the ALTA software, which works life-stress relationship GLL for up to eight stresses.

Capítulo 1

1. Introducción

Los fabricantes de hoy se enfrentan a una fuerte presión para desarrollar nuevos productos de tecnología superior en un tiempo récord, al tiempo que mejoran la productividad, la confiabilidad y la calidad general del producto. Esto ha motivado el desarrollo de métodos como la ingeniería concurrente y alentó a un mayor uso de los experimentos diseñados para la mejora de productos y procesos. Los requisitos para una mayor confiabilidad han aumentado la necesidad de realizar por adelantado ensayos de materiales, componentes y sistemas. Esto está en línea con la filosofía moderna de calidad para la producción de productos de alta confiabilidad: lograr una alta confiabilidad mediante la mejora de los procesos de diseño y fabricación; alejarse de la dependencia de la inspección (o screening) para lograr una alta confiabilidad (Meeker & Escobar, 1998).

Para determinar la confiabilidad de un producto es necesario realizar la estimación del rendimiento de la distribución de tiempos de fallo de los componentes. Si estos productos tienen alta confiabilidad, la tarea resulta particularmente difícil. La mayoría de los productos modernos están diseñados para funcionar sin fallas durante años, décadas o más. Así pocas unidades fallarán o se degradan apreciablemente en una prueba de longitud práctica en condiciones normales de uso. Por ejemplo, el diseño y la construcción de un satélite de comunicaciones pueden permitir sólo ocho meses para probar componentes que se espera que estén en servicio durante 10 o 15 años. Para este tipo de aplicaciones, las pruebas aceleradas se utilizan ampliamente en las industrias manufactureras, particular para obtener información oportuna sobre la confiabilidad de los componentes y materiales. Hay problemas prácticos y estadísticos difíciles implicados en la aceleración de la vida de un producto complicado que puede fallar en diferentes maneras. En general, la información de las pruebas en los altos niveles de una o más variables de aceleración (por ejemplo, la temperatura, voltaje o presión) se extrapola, a través de un modelo estadístico físicamente razonable para obtener estimaciones de la vida, de un nivel alto a los niveles normales de la variable de aceleración. Los resultados de las pruebas aceleradas se utilizan en el proceso de confiabilidad-diseño para evaluar o demostrar la confiabilidad de un

componente o sistema, para certificar componentes, para detectar los modos de fallo de tal manera que puedan ser corregidos, así como para comparar diferentes fabricantes. Las pruebas aceleradas se han vuelto cada vez más importante debido a que las tecnologías cambian rápidamente, los productos son más complicados y con más componentes, las expectativas de los clientes son más altas, demandan mayor confiabilidad y la necesidad de un rápido desarrollo de productos (Meeker & Escobar, 1998).

Es un hecho que debido al fenómeno denominado globalización, se ha puesto en marcha una competencia sin precedentes por ganar mercados donde de los consumidores son cada vez más exigentes. El escenario de la competencia es cada vez más estrecho y concurrido ante los grandes avances de la ciencia y el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación. La batalla de las empresas por sobrevivir en estos mercados ha generado la necesidad de invertir en investigación y desarrollo de nuevos productos en aras de buscar generar ventajas competitivas. En este sentido las empresas buscan ofrecer productos que además de ser innovadores, cuenten con estándares de calidad cada vez más altos, así la creciente exigencia de los consumidores en la oferta productos alta confiabilidad y la necesidad de reducir el tiempo que transcurre desde el diseño hasta la fabricación, han llevado a la industria a acortar la duración de las pruebas que se realizan a los productos con el fin de evaluar su confiabilidad antes de su lanzamiento.

Hoy en día, el termino confiabilidad es parte de nuestro lenguaje cotidiano, sobre todo cuando se habla acerca de la funcionalidad de un producto. Un producto muy confiable es un producto que cumple su función en todo momento y bajo todas las condiciones operativas. La definición técnica para la confiabilidad difiere sólo ligeramente ampliando esta definición común a la de probabilidad: la confiabilidad es la probabilidad de que un producto no falle bajo condiciones ambientales y funcionales dadas durante un período de tiempo definido (The Association of German Engineers (VDI), 2006).

La confiabilidad se evalúa mediante pruebas de vida se realizan en dos modos distintos: estándar o aceleradas. En el caso del modo estándar, los ensayos se llevan a cabo en los parámetros de funcionamiento normales y a temperatura ambiente. Por otra parte, el tiempo de funcionamiento actual se considera como el tiempo de prueba. En el caso de la modalidad acelerada, parámetros como el voltaje, la temperatura, humedad y presión entre otros, son

variados por encima de sus valores normales para reducir el tiempo de la prueba, o la prueba podría ser simplemente una prueba como prueba de la muerte súbita (Dhillon, 2005).

Las pruebas de vida acelerada (ALT, Accelerated Life Testing por sus siglas en inglés) son una alternativa comúnmente utilizada para obtener información de tiempos de fallo rápidamente bajo altos niveles de estrés con el fin de predecir el rendimiento de vida del producto bajo condiciones de estrés de diseño (Elsayed & Zhang, 2007).

Las ALT se realizan con el objetivo de someter a los productos a altos niveles de una o más variables de aceleración o de esfuerzo (como pueden ser temperatura, voltaje o presión) para obtener datos rápidamente, los cuales son modelados y analizados para proporcionar información que permita estimar la vida de un producto bajo condiciones normales de uso. Hay una gran variedad de métodos estadísticos utilizados en la aceleración de la vida de un producto. Generalmente, la información de las pruebas a altos niveles de una o más variables de aceleración o de esfuerzo se utiliza para estimar la distribución de vida del producto.

La presente investigación se enfoca en Pruebas de Vida Acelerada aplicada a sellos de pistón neumáticos, un producto nuevo fabricado de poliuretano obtenido en el área de Ingeniería de diseño y materiales de empresa Tracto partes Agrícolas que tiene sus operaciones en la ciudad de Nuevo Casas Grandes, Chihuahua. Ofrece todo tipo de sellos hechos a la medida, según las necesidades del consumidor. Los productos más demandados son sellos de cilindro y actuadores hidráulicos y neumáticos. La Figura 1.1 muestra la clasificación de sellos que la empresa fabrica, esta ofrece sellos comerciales que adquiere de proveedores nacionales e internacionales y sellos maquinados en un equipo de Control Numérico por Computadora (CNC), estos son fabricados con barras de poliuretano importadas y con barras de poliuretano elaboradas por la misma compañía.

Se realizarán las ALT a sellos de pistón maquinados, utilizando barras de poliuretano elaboradas por la misma compañía. El estudio se realiza bajo el modelo de relación vida-esfuerzo Log-Lineal General (GLL). En el estudio se utilizará como soporte el software ALTA de la compañía ReliaSoft.

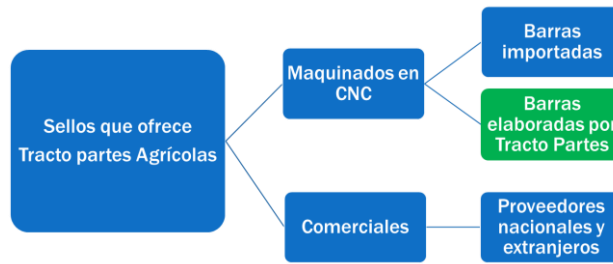


Figura 1.1 Clasificación de sellos que oferta Tracto Partes Agrícolas.

Los especímenes a probar son sellos de poliuretano, comúnmente llamados empaques o retenes, son anillos de polímeros u otros materiales cuya función principal es evitar fugas en un sistema hidráulico. Estos sistemas los encontramos en una gran variedad de máquinas como son grúas, tractores, retroexcavadoras, elevadores, prensas, cizallas, montacargas, etc. Los sellos cubren la mayoría de aplicaciones que están vinculadas con maquinaria agrícola, maquinaria pesada, fabricación de productos alimenticios, farmacéuticos, cárnicos, lácteos, aseo y bebidas. La apariencia y tipos de sellos hidráulicos y neumáticos más comunes en el mercado se muestran en la Figura 1.2 y en la Figura 1.3.



Figura 1.2 Diferentes tipos de sellos utilizados en sistemas hidráulicos y neumáticos.



Figura 1.4 Maquinado de sellos.

1.2 Planteamiento del problema

El producto se encuentra en fase de prueba y ha sido ofrecido en promoción a sus clientes, aunque con muy poco éxito. Aún y cuando los sellos neumáticos fabricados por esta empresa, son ofrecidos con garantía de reemplazo, los sellos comerciales son considerados por los clientes más confiables. Sus clientes no desean correr riesgos, si el equipo o maquinaria falla durante la producción se pueden generar grandes pérdidas monetarias para el cliente, por ello la garantía de reemplazo no es suficiente.

La desconfianza que sus clientes tienen hacia este producto en fase de prueba, pone en serios aprietos a la compañía, ya que planea lanzarlo a finales de este año y dada la desconfianza manifestada respecto a la confiabilidad de los sellos, existen altas probabilidades de que el lanzamiento de este nuevo producto sea un rotundo fracaso. La empresa fabrica sellos para diferentes compañías como: ALSA constructora, Minera Bismarck, Vistas del Sol Foods, Industria agrícola menonita, los cuales exigen garantizar la vida o la calidad del producto a través del tiempo, exigencia que aún no puede satisfacer.

Aun y cuando la empresa ofrecerá sellos a menor precio, el problema principal es que no puede ofrecer una garantía de vida debido a que la vida útil del producto se desconoce. Ganarse la confianza de los clientes será el reto más grande que se deberá enfrentar.

1.3 Hipótesis

El producto nuevo, sellos de pistón neumáticos fabricados por la empresa Tracto partes Agrícolas, tienen una vida útil no mayor a 15000 kilómetros de recorrido.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Realizar Pruebas de Vida Acelerada con tres variables de estrés para estimar la vida media (MTTF) de los sellos de pistón neumáticos a condiciones de uso normal.

1.4.2 Objetivos específicos

- a. Identificar la distribución de vida de los sellos.
- b. Estimar los parámetros de la relación Log-lineal General
- c. Obtener los percentiles que permitan establecer los tiempos de garantía de los sellos.
- d. Calcular los límites de confianza (90% y 95%) para los percentiles y el MTTF.

1.5 Justificación

Sin duda, la estrategia de Tracto partes Agrícolas de producir las barras de poliuretano y maquinar con estas sellos hidráulicos, trae beneficios como la reducción de costos de producción, disminución del tiempo de respuesta a sus clientes y precios más bajos, sin embargo para incrementar las probabilidades de éxito, el lanzamiento de este nuevo producto debe ir acompañado de una garantía de vida, avalada por un estudio que dé certeza y confianza a sus clientes sobre la calidad y confiabilidad de los sellos.

La alta confiabilidad en un producto tiene un enorme impacto positivo en la satisfacción y la generación de confianza del cliente, por lo que la realización de pruebas de confiabilidad a los sellos hidráulicos es una buena alternativa para este tipo de producto que demanda una alta confiabilidad, esto sin duda ayudará a la empresa en el lanzamiento de su nuevo producto. Si un componente falla en su desempeño por cualquier motivo, todo el sistema puede fallar lo que

puede poner en riesgo la seguridad de los clientes; desafortunadamente, todas las fallas en el servicio tienen consecuencias económicas indeseables y no siempre a los responsables (Saunders, 2007).

Un gran número de dispositivos necesitan ser probados a una extensa cantidad de tiempo bajo condiciones normales de funcionamiento con el fin de obtener mediciones precisas. Un método comúnmente usado para estimar la confiabilidad de tales sistemas en un tiempo mucho más corto son las pruebas de la vida acelerada (Balakrishnan, 2010).

El sello es un producto de larga vida, por ello la conveniencia de utilizar las ALT, estas proporcionarán información que le servirá a la compañía para determinar las características de vida de los sellos y establecer políticas de garantía que permitan generar la confianza en el producto y establecer condiciones que ayudarán en el lanzamiento de este producto y ampliar la cobertura de su mercado.

Si la empresa no puede ofrecer una garantía de vida (y no la ofrecerá sin conocer la vida útil de su producto), difícilmente podrá ganarse la confianza y aceptación de su producto, por lo que este proyecto representa la oportunidad para resolver los problemas actuales de Tracto partes y le permitirá avanzar en el cumplimiento de sus metas organizacionales.

1.6 Alcances y delimitaciones

1.6.1 Alcances

El alcance de proyecto se extiende a los cilindros neumáticos de simple y doble efecto que trabajen bajo presiones menores a 232 psi. Los cilindros considerados pueden tener 0,25 metros de diámetro máximo de pistón. Estas limitantes se toman debido a que la máquina CNC que fabrica actualmente los sellos tiene la capacidad de elaborar un sello hasta un diámetro exterior de 0,254 m.

Como parte del convenio que se tiene con la empresa Tracto partes Agrícolas, del resultado de esta investigación se obtendrá un informe técnico, además se pretende obtener un artículo para su publicación en una revista arbitrada.

1.6.2 Delimitaciones

Las ALT se aplicarán a sellos de pistón fabricados de poliuretano que se obtiene de un proceso interno cuya caracterización es la siguiente:

Poliuretano termoplástico (resistente al agua) que es adecuado para su uso en aplicaciones de sellado. Su diseño de copa en U de acción simple evite las fugas durante la operación y su diseño resista la abrasión. Se fabrican en tamaños que cumplen con las normas internacionales como ISO 868, ISO 1183, ISO 815, DIN 53 504, DIN 53 516 y DIN 53 ISO 34-1 Método B, las cuales especifican los valores y tolerancias de la dureza, abrasión, tensión, ruptura, resistencia y compresión entre otros.

Es de suma importancia considerar que el equipo de prueba tiene que ser capaz de alcanzar los niveles de estrés en los que se desean probar las unidades experimentales y además de permitir más de una condición de estrés. La confiabilidad de las inferencias estará delimitada por la calidad y versatilidad del equipo de prueba, por lo que en esta investigación no se pretende evaluar la incertidumbre concerniente a la capacidad del equipo de prueba.

El equipo de medición es otra delimitante de la investigación, ya que mediante este se puntualizan las mediciones que se obtienen después de la definición y funcionamiento del plan y equipo de prueba. La variación concerniente a la calibración del sistema de medición se considera como incertidumbre propia del proceso.

Capítulo 2

2. Marco teórico

2.1 Confiabilidad

Según la norma ISO 20815:2008 confiabilidad se refiere a la capacidad de un artículo para realizar una función requerida bajo condiciones dadas para un intervalo de tiempo dado (International Organization for Standardization, 2008).

Ebeling (2010) define confiabilidad como la probabilidad de que un componente o sistema desempeñe una función requerida para un periodo de tiempo dado cuando este es utilizado bajo condiciones de funcionamiento establecidas.

Para Birolini (2010) la confiabilidad es una característica del artículo, expresada por la probabilidad de que éste realizará su función requerida bajo condiciones especificadas para un intervalo de tiempo determinado. Generalmente se le designa con la letra R. Desde un punto de vista cualitativo, la confiabilidad se puede definir como la capacidad de mantener el producto funcional. Cuantitativamente, confiabilidad específica la probabilidad de que no ocurrirán interrupciones (fallas) operacionales durante un intervalo de tiempo indicado

Meeker & Escobar (1998) definen la confiabilidad como la probabilidad de que un sistema, vehículo, maquina, equipo, etc., desarrolle su función prevista bajo condiciones de operación para un periodo de tiempo. La mejora de la confiabilidad es una parte importante del panorama general más amplio de la mejora de la calidad del producto. Hay muchas definiciones de calidad, pero en general concuerdan que un producto no confiable no es un producto de alta calidad. Condra (1993) hace hincapié en que "la confiabilidad es la calidad en el tiempo."

Dummer, Tooley, & R.C.Winton (1997) definen confiabilidad como la característica de un artículo expresa por la probabilidad de que se llevará a cabo una función requerida bajo las condiciones establecidas por un período determinado de tiempo.

Lewis (1994) define la confiabilidad como la probabilidad de que un sistema realizará su función adecuadamente durante un período determinado de tiempo bajo un conjunto dado de condiciones de funcionamiento.

2.1.1 Confiabilidad versus Calidad

La calidad y la confiabilidad son términos que se utilizan indistintamente. Están fuertemente conectados, pero no son lo mismo. En los términos sencillos: La calidad es la conformidad con las especificaciones y la confiabilidad es la conformidad con las especificaciones en el tiempo. La confiabilidad es la continuación de la calidad a través del tiempo. Es simplemente el periodo de tiempo durante el cual un producto cumple con los estándares de calidad para el período de uso esperado. La calidad es ahora el estándar para hacer negocios. En el mercado de hoy y más allá, la confiabilidad será el estándar para hacer negocios. La revolución de la calidad no ha terminado; sólo se ha convertido en la revolución de la confiabilidad (Levin & Kalal, 2003).

La confiabilidad es asociada con la calidad de un producto y a menudo se considera subconjunto de la calidad. La calidad puede ser definida cualitativamente como la cantidad en la cual los productos satisfacen los requisitos de los clientes. La calidad de un producto es en parte una función de diseño y concordancia con las especificaciones de diseño. Esto también depende del sistema de producción sobre la incorporación de procedimientos de manufactura y las tolerancias. La aseguranza de la calidad es un conjunto de procesos y procedimientos planeados, necesarios para alcanzar un producto de alta calidad. Por otro lado, la confiabilidad tiene que ver con que tanto tiempo el producto continúa funcionando una vez que entra en operación. Un producto de calidad pobre probablemente tendrá una confiabilidad baja y un producto de alta calidad tendrá una alta confiabilidad. Como hemos visto, sin embargo, la confiabilidad puede depender de factores externos y no justamente a la calidad del mismo producto. No obstante la confiabilidad puede ser vista como la calidad del producto a lo largo del tiempo de operación (Ebeling, 2010).

2.1.2 La función de confiabilidad

La confiabilidad se define como la probabilidad de que un sistema o componente realice la función para la cual fue diseñado, bajo ciertas condiciones de uso especificadas, por un periodo

de tiempo t . Para expresar esta relación matemáticamente definimos la variable aleatoria continua T como el tiempo hasta el fallo de un sistema o componente; $T \geq 0$.

Entonces la confiabilidad puede ser expresada como

$$R(t) = \Pr\{T \geq t\}. \quad (2.1)$$

Donde $R(t) \geq 0, R(0) = 1$, and $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$. Para un valor dado t , $R(t)$ es la probabilidad de que el tiempo hasta el fallo sea mayor o igual a t .

Si definimos

$$F(t) = 1 - R(t) = \Pr\{T < t\}. \quad (2.2)$$

Donde

$$F(0) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1 \quad (2.3)$$

Entonces $F(t)$ es la probabilidad de que ocurra una falla antes del tiempo t .

Nos referimos a $R(t)$ como la *función de confiabilidad* y $F(t)$ como la *función de distribución acumulada* (CDF) o la distribución de falla. Una tercera función definida por

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = - \frac{dR(t)}{dt}. \quad (2.4)$$

$f(t)$ es conocida como *función de densidad de probabilidad* (PDF). Esta función describe la forma de la distribución de falla. Estas tres distribuciones se ilustran en la Figura 2.1.

La PDF, $f(t)$, tiene estas dos propiedades:

$$f(t) \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$$

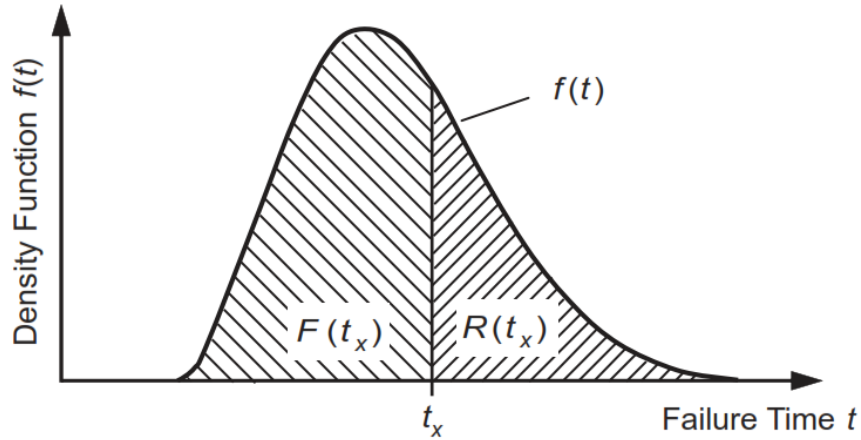


Figura 2.1 Probabilidad de supervivencia $R(t)$ como complemento de la probabilidad de fallo $F(t)$.

Dada la PDF, $f(t)$, entonces

$$F(t) = \int_0^t f(t') dt'. \quad (2.5)$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t') dt'. \quad (2.6)$$

En otras palabras, ambas funciones de confiabilidad y la CDF representan las áreas bajo la curva definida por $f(t)$. Por lo tanto, puesto que el área debajo de la curva entera es igual a uno, la confiabilidad y la probabilidad de fallo se define de forma que

$$0 \leq R(t) \leq 1 \quad 0 \leq F(t) \leq 1$$

La función $R(t)$ se usa normalmente cuando se calculan confiabilidades y la función $F(t)$ es normalmente utilizada cuando se calculan las probabilidades de fallo.

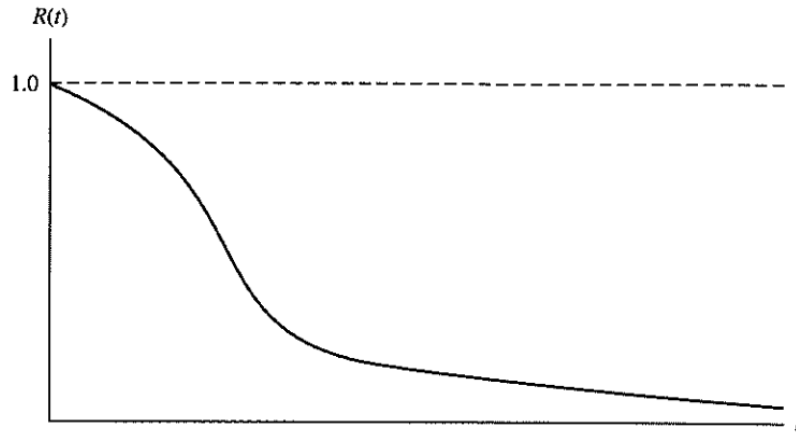


Figura 2.2 La función de confiabilidad

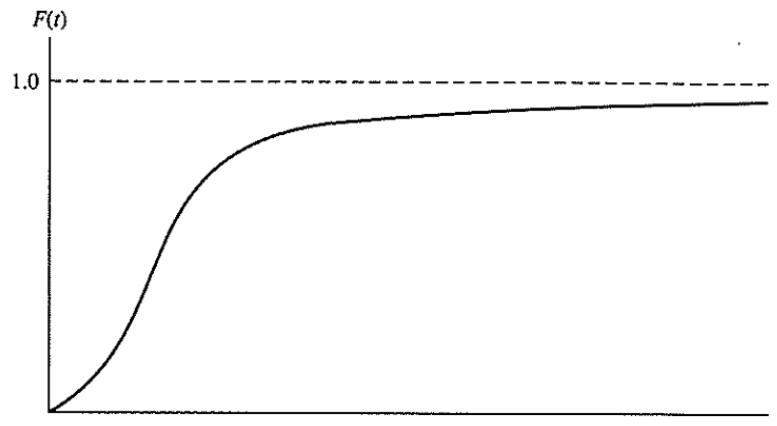


Figura 2.3 La función de distribución acumulada.

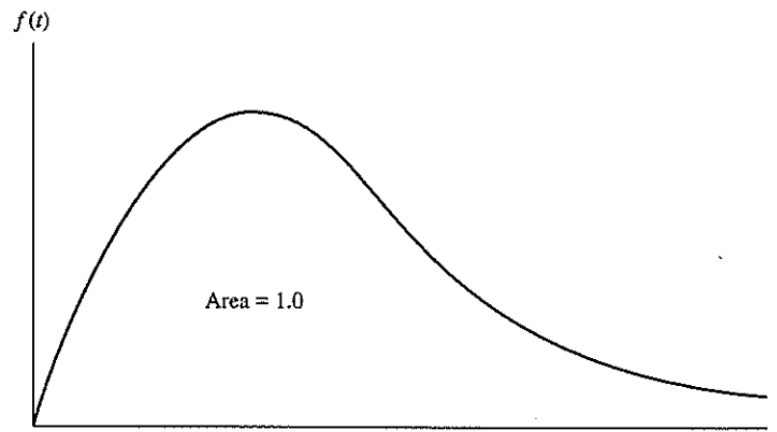


Figura 2.4 La función de densidad de probabilidad.

La probabilidad de que una falla ocurra dentro de algún intervalo de tiempo $[a, b]$ puede ser encontrada utilizando cualquiera de las tres probabilidades.

$$Pr\{a \leq T \leq b\} = F(b) - F(a) = R(a) - R(b) = \int_a^b f(t) dt. \quad (2.7)$$

2.1.3 Tiempo medio hasta el fallo (MTTF)

Probablemente el parámetro más utilizado para caracterizar la confiabilidad es el tiempo medio hasta el fallo (o MTTF). El MTTF se define por

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (2.8)$$

El MTTF puede ser escrito directamente en términos de confiabilidad sustituyendo la ecuación 2.4 en la ecuación 2.8 e integrando por partes:

$$MTTF = - \int_0^{\infty} t \frac{dR}{dt} dt = -tR(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.9)$$

Claramente, el término $tR(t)$ se anula en $t = 0$. De manera similar, de la Eq. 2.6, observamos que $R(t)$ decaerá exponencialmente o más rápido, debido a que la tasa de fallo $\lambda(t)$ debe ser mayor que cero. Por tanto $tR(t) \rightarrow 0$ así como $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, tenemos que

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.10)$$

La media de la distribución de falla es únicamente una de las muchas medidas de tendencia central de la distribución de falla. Otra es el tiempo mediano de falla definido por

$$R(t_{med}) = 0.5 = Pr\{T \geq t_{med}\}. \quad (2.11)$$

La mediana divide la distribución en dos mitades con 50 por ciento de las fallas que ocurren antes del tiempo mediano de falla y el 50 por ciento que ocurren después de la mediana.

Un tercer promedio utilizado es la moda o el tiempo de falla más comúnmente observado, definido por

$$R(t_{mode}) = \max_{0 \leq t \leq \infty} f(t). \quad (2.12)$$

En la Figura 2.5 se muestran las tres medidas

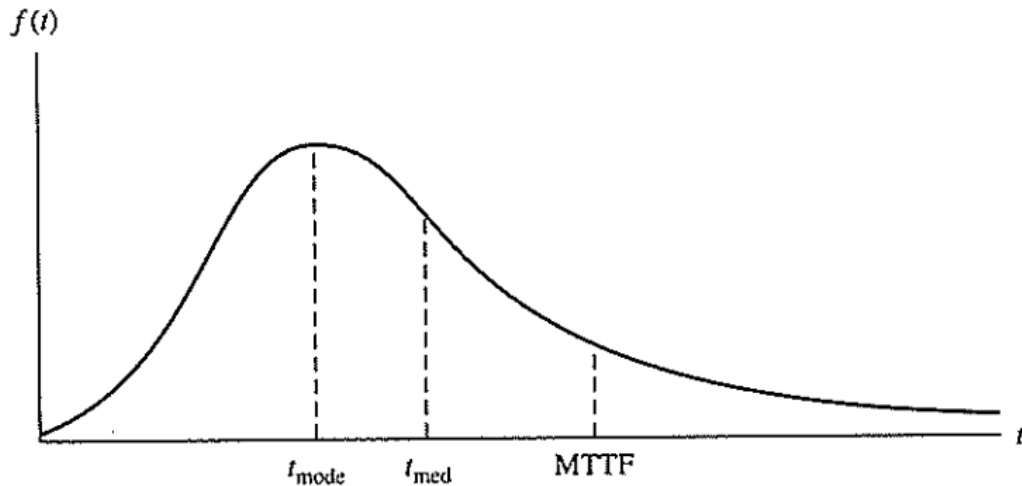


Figura 2.5 Comparación de las medidas de tendencia central.

Obviamente el MTTF por sí solo no va a caracterizar de forma única una distribución de falla. Otra medida es necesaria. Una medida que a menudo es utilizada para describir adicionalmente una distribución de falla es su varianza σ^2 , definida por

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - MTTF)^2 f(t) dt. \quad (2.13)$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - (MTTF)^2. \quad (2.14)$$

El cuál es la media o valore esperado de la distribución de probabilidad definida por $f(t)$.

2.1.4 La función de la tasa de falla

Además de las funciones de probabilidad antes definidas, otra de las funciones importantes es llamada *función de tasa de riesgo o tasa de falla* $\lambda(t)$ que es a menudo utilizada en confiabilidad.

Bertsche (2008) menciona que para describir el comportamiento de las fallas con la tasa de fallos $\lambda(t)$, las fallas en el punto en el tiempo t o en una clase i , no se divide entre la suma de total de fallas como en la frecuencia relativa, sino que se divide entre la suma de unidades que siguen intactas:

$$\lambda(t) = \frac{\text{Fallas (en un punto en el tiempo } t \text{ ó en la clase } i)}{\text{Suma de unidades aun intactas (en un punto en el tiempo ó en la clase } i)}$$

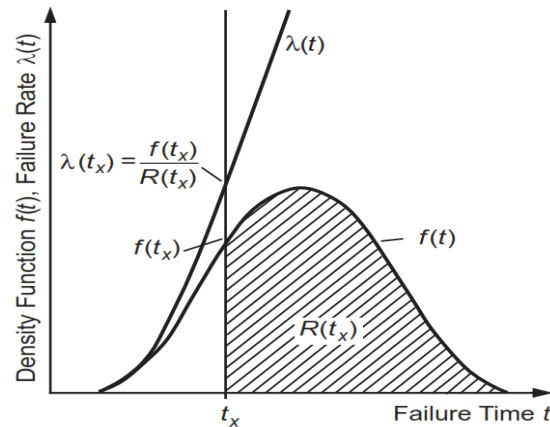


Figura 2.6 Representación gráfica de la tasa de fallo.

Esta provee una tasa instantánea (al tiempo t) de falla. Esta función representa la probabilidad instantánea, por unidad de tiempo, que tiene un componente de fallar en un instante t , dado que había funcionado hasta el instante anterior.

$$Pr\{t \leq T \leq t + \Delta t\} = R(t) - R(t + \Delta t). \quad (2.15)$$

$$Pr\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

Entonces

$$\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t}. \quad (2.16)$$

Es la probabilidad condicional de falla por unidad de tiempo (tasa de falla).

Sea

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-[R(t) + \Delta t] - R(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)}$$

$$\lambda(t) = \frac{-dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.17)$$

Entonces $\lambda(t)$ es conocida como la *tasa de riesgo instantánea o función de tasa de riesgo*. Esta razón se puede interpretar como la proporción de fallas en el instante t relativo solo a los componentes que no han fallado hasta ese instante. A diferencia de esta función, la función de densidad $f(t)$ representa la proporción de fallas en el instante t , pero respecto al total de la muestra. La tasa de falla se obtiene a partir del límite, cuando $t \rightarrow 0$, de la probabilidad condicionada de que el componente falle antes del tiempo $t + \Delta t$, dado que había funcionado hasta el instante t .

La función de tasa de riesgo $\lambda(t)$ proporciona una forma alternativa de describir una distribución da falla. Las tasas de falla en algunos casos pueden ser caracterizadas como creciente (IFR), decreciente (DFR) o constante (CFR), donde $\lambda(t)$ es una función creciente, decreciente o constante.

Una función de tasa de riesgo en particular determinará de forma única una función confiabilidad, esto es

$$\lambda(t) = \frac{-dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} \quad o \quad \lambda(t) dt = \frac{-dR(t)}{R(t)}. \quad (2.18)$$

Integrando,

$$\int_0^t \lambda(t') dt' = \int_1^{R(t)} \frac{-dR(t)}{R(t)}. \quad (2.19)$$

Donde $R(0) = 1$ establece el límite inferior de la integral del lado derecho.

Entonces

$$-\int_0^t \lambda(t') dt' = \ln R(t). \quad (2.20)$$

$$R(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(t') dt' \right]. \quad (2.21)$$

Esta ecuación puede ser utilizada para derivar la función de confiabilidad de una función de tasa de riesgo conocida.

Para obtener la función de densidad de probabilidad para fallas, simplemente insertamos la Eq. 6.21 en la Eq. 6.17 y resolviendo para $f(t)$:

$$f(t) = \lambda(t) \exp \left[- \int_0^t \lambda(t') dt' \right]. \quad (2.22)$$

2.1.5 Tasa de riesgo acumulada

La tasa acumulada de riesgo sobre un periodo de tiempo t está definida por

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t') dt'. \quad (2.23)$$

2.1.6 El p -cuantil

El p -cuantil de la distribución de la variable aleatoria T es el valor t de la variable que separa una probabilidad acumulada p a la izquierda. De este modo, el p -cuantil t_p verifica que

$$Pr\{T \leq t_p\} = p. \quad (2.24)$$

Luego, si F es la función de distribución de la variable aleatoria, el p -cuantil se obtiene como solución de la ecuación

$$F(t_p) = p. \quad (2.25)$$

Es decir, $t_p = F^{-1}(p)$, donde F^{-1} es la función inversa de F .

La función $F^{-1}(p)$ es la función inversa de $F(t)$. En el caso exponencial resulta de despejar t como sigue:

$$t_p = F^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda}(1 - F(t)) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - p) \quad (2.25a)$$

En la práctica es de gran interés el tiempo de falla mediano $t_{0.5}$, que es el menor punto donde la función de distribución acumulada alcanza el valor de 0.5.

2.1.7 Relaciones y equivalencias

De las funciones establecidas anteriormente, se pueden hacer las siguientes relaciones

- a. Relación entre la función de densidad. La función de distribución y la función de confiabilidad.

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t). \quad (2.26)$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}(1 - R(t)). \quad (2.27)$$

$$f(t) = -R'(t). \quad (2.28)$$

- b. Relación entre tasa de falla y función de confiabilidad.

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{r(t)}. \quad (2.29)$$

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt}\ln R(t). \quad (2.30)$$

- c. Relación entre la tasa de falla acumulada y la función de confiabilidad.

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t') dt'. \quad (2.31)$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt'} - \ln R(t') dt'.$$

$$\Lambda(t) = -\ln R(t). \quad (2.32)$$

d. Relación entre la función de densidad y la tasa de falla.

$$f(t) = \lambda(t)e^{\int_0^t \lambda(t') dt'} \quad (2.33)$$

$$= \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}$$

$$f(t) = \lambda(t)R(t). \quad (2.34)$$

La importancia de conocer las relaciones y equivalencias entre las funciones $f(t)$, $\lambda(t)$, $F(t)$ y $R(t)$, se deriva del hecho de que si solo se conoce una de estas funciones, se pueden deducir cualesquiera de las otras.

2.2 Distribuciones de probabilidad

2.2.1 La distribución exponencial

Una de las distribuciones de falla más comunes en ingeniería de confiabilidad es la exponencial o modelo CFR. Matemáticamente, se trata de una distribución bastante simple, que muchas veces conduce a su uso en situaciones inapropiadas. Es, de hecho, un caso especial de la distribución de Weibull, donde $\beta = 1$. La distribución exponencial se utiliza para modelar el comportamiento de unidades que tienen una tasa de fallo constante (o unidades que no se degradan con el tiempo o se desgastan (Ebeling, 2010)).

2.2.1.1 Función de densidad de probabilidad exponencial (PDF) 2-parametros

Ebeling (2010) menciona que si un fallo no se produce antes de un tiempo determinado γ , entonces γ es un mínimo, o umbral de tiempo. También se le conoce como la *vida útil*

garantizada. El parámetro γ es un parámetro de localización que desplaza la distribución una cantidad igual a γ hacia la derecha sobre el eje (horizontal) tiempo. Esto equivale a reescribir la función de densidad reemplazando t con $t - \gamma$, con el dominio de la variable aleatoria ahora $t \geq \gamma$. Para la distribución exponencial, la función de densidad de probabilidad se convierte en

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad 0 < \gamma \leq t < \infty \quad (2.35)$$

y la función de confiabilidad tomará la siguiente forma:

$$R(t) = e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad t \geq \gamma \quad (2.36)$$

De las ecuaciones (2.35) y (2.36) la tasa de fallo es $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$. Sin embargo la media de la distribución no es grande $1/\lambda$ pero es desplazada a una distancia γ a lo largo del eje t . Usando la integración por partes tenemos que

$$MTTF = \int_{\gamma}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda(t-\gamma)} dt = \gamma + \frac{1}{\lambda} \quad (2.37)$$

La mediana de la distribución es obtenida resolviendo la Eq. 2.36 para t_{med} ,

$$R(t_{med}) = e^{-\lambda(t_{med}-\gamma)} = 0.5 \quad (2.38)$$

y obteniendo

$$t_{med} = \gamma + \frac{\ln 0.5}{-\lambda} = \gamma + \frac{0.69315}{\lambda} \quad (2.39)$$

La vida de diseño t_R para una confiabilidad diseñada R especificada puede ser obtenida de la misma forma como el tiempo mediano. Por lo tanto,

$$t_R = \gamma + \frac{\ln R}{-\lambda} \quad (2.40)$$

2.2.1.2 Función de densidad de probabilidad exponencial (PDF) 1-parametro

Comenzamos el desarrollo del modelo CFR suponiendo que $\lambda(t) = \lambda$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Entonces de la ecuación (2.21)

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda dt'\right] = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (2.41)$$

y
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.42)$$

Las tres funciones de probabilidad están gráficamente ilustradas en la Figura 2.7, Figura 2.8 y Figura 2.9 para diferentes valores de λ . Para encontrar el MTTF, utilizamos la ecuación (2.10).

$$MTTF = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \left. \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.43)$$

La varianza está dada por la ecuación (2.13), o

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.44)$$

y la desviación estándar es $\frac{1}{\lambda} = MTTF$. Este es un resultado interesante puesto que implica que la variabilidad de tiempo de fallo aumenta a medida que aumenta la fiabilidad. (MTTF).

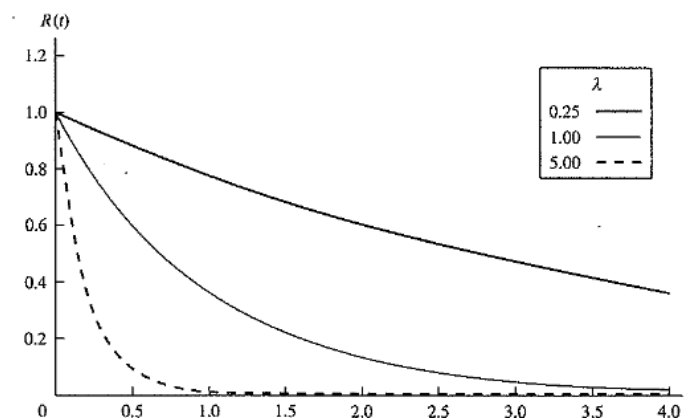


Figura 2.7 La función de confiabilidad exponencial.

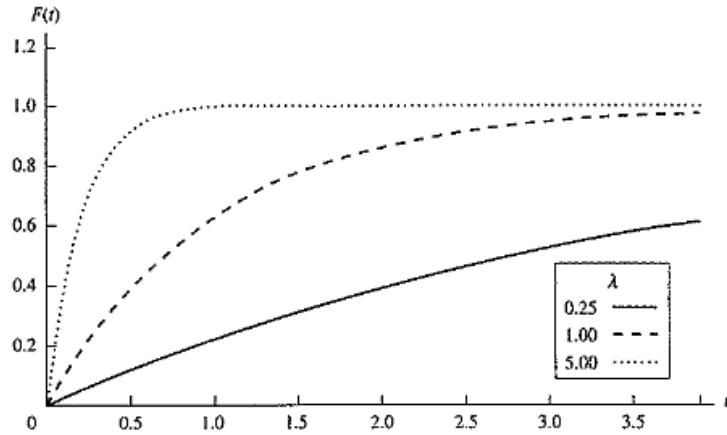


Figura 2.8 La función de distribución exponencial acumulada.

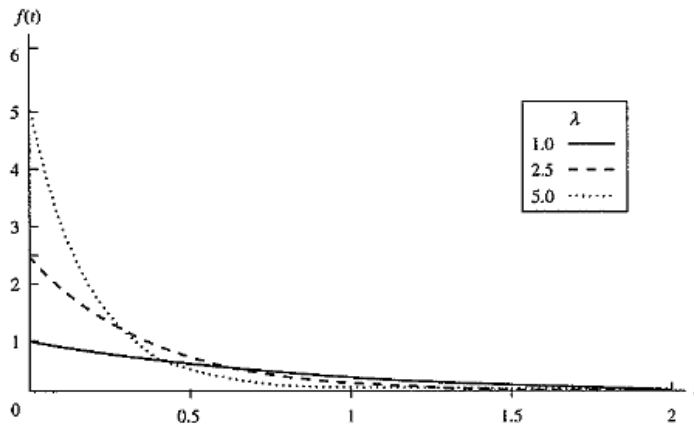


Figura 2.9 La función de densidad de probabilidad exponencial.

La vida de diseño de un componente que tiene un tiempo de fallo distribuido exponencialmente se puede obtener mediante la solución de la inversa de la función fiabilidad. Esto es, para una confiabilidad dada R ,

$$R(t_R) = e^{-\lambda t_R} = R$$

Entonces

$$t_R = -\frac{1}{\lambda} \ln R \tag{2.45}$$

Cuando $R = 0.5$, la mediana de la distribución es obtenida por la ecuación (2.45):

$$t_{med} = -\frac{1}{\lambda} \ln 0.5 = \frac{0.69315}{\lambda} \tag{2.46}$$

$$= 0.69315 \text{ MTTF}$$

La mediana es siempre menor que la media debido a que la distribución exponencial es sesgada hacia la derecha.

Una característica bien conocida del modelo CRF, no compartida por otras distribuciones de falla, es su pérdida de memoria. Esto es, el tiempo de fallo de un componente no depende de que tanto el componente ha estado en operación. No hay efecto de envejecimiento o desgaste. Esta propiedad puede ser demostrada matemáticamente utilizando la probabilidad condicional.

$$\begin{aligned} R(t|T_0) &= \frac{R(t + T_0)}{R(T_0)} = \frac{e^{-(t+T_0)}}{e^{-\lambda T_0}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda T_0}}{e^{-\lambda T_0}} = e^{-\lambda t} = R(t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

En otras palabras, el tiempo de fallo depende únicamente de la duración del tiempo de funcionamiento observado t y no de su edad actual T_0 .

2.2.2 La distribución Weibull

La distribución Weibull es una de las distribuciones de tiempo de vida más ampliamente utilizada en ingeniería de confiabilidad. Es una distribución versátil que puede tomar características de otros tipos de distribuciones, basado en el valor del parámetro de forma β (ReliaSoft, 2014).

Según Ebeling (2010) la distribución de fallo Weibull puede ser utilizada para modelar tasas de fallo crecientes y decrecientes. Está caracterizada por una función de tasa de riesgo de la forma

$$\lambda(t) = \alpha t^b$$

la cual es una función poderosa. La función $\lambda(t)$ es creciente para $a > 0, b > 0$ y es decreciente para $a > 0, b < 0$. Por conveniencia matemática es mejor expresar $\lambda(t)$ de la siguiente manera:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \quad \theta > 0, \beta > 0, t \geq 0 \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp \left[- \int_0^t \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t'}{\theta}\right)^{\beta-1} dt' \right] \\ &= e^{-(t/\theta)^\beta} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$f(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\theta)^\beta} \quad (2.50)$$

Beta (β) se conoce como el *parámetro de forma*. Este efecto sobre la distribución puede observarse en la Figura 2.10 para varios valores diferentes. Para $\beta < 1$, la PDF es similar en forma que la exponencial, y para valores más grandes de β (por ejemplo $\beta \geq 3$), la PDF es algo simétrica, como la distribución normal. Para $1 < \beta < 3$, la función de densidad es sesgada. Cuando $\beta = 1$, $\lambda(t)$ es una constante y la distribución es idéntica a la exponencial con $\lambda = 1/\theta$. Como se observa en la Figura 2.11 y Figura 2.12, cada una de las CDF y las curvas de confiabilidad pasan a través de el mismo punto donde $t = \theta$, ya que desde la ecuación (2.49),

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{\theta}{\theta}\right)^\beta \right] = \exp(-1) = 0.368.$$

Por lo tanto, el 63.2 por ciento de todas las fallas Weibull se producirán en el tiempo $t = \theta$ independientemente del valor del parámetro de forma. La figura 2.13 muestra que la función de tasa de riesgo puede incrementar o disminuir dependiendo del valor de β .

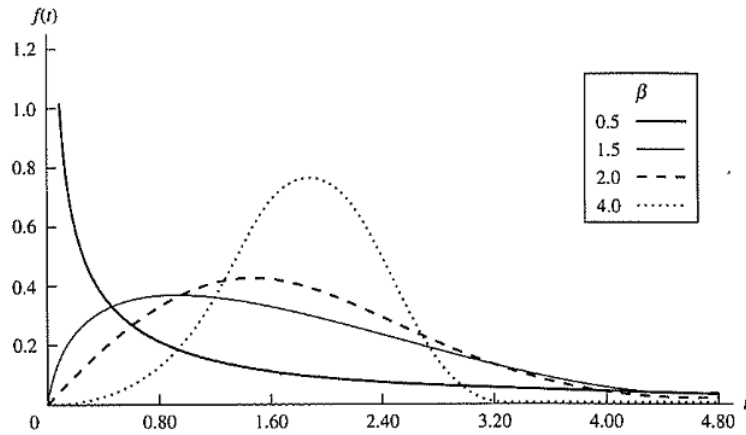


Figura 2.10 El efecto de β sobre la función de densidad de probabilidad Weibull.

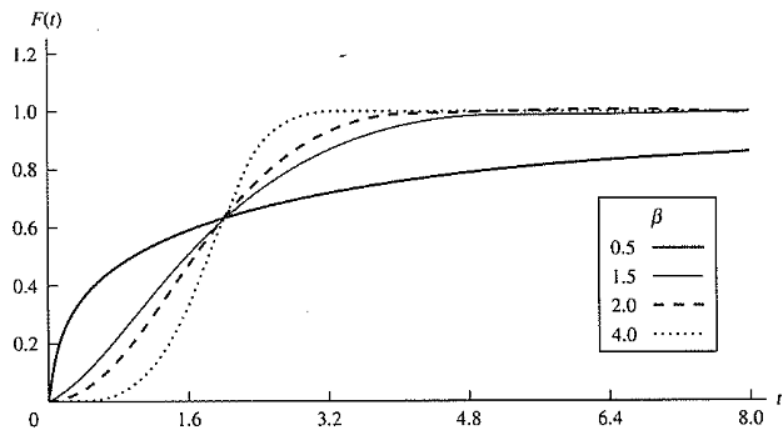


Figura 2.11 El efecto de β sobre la función de distribución acumulada Weibull.

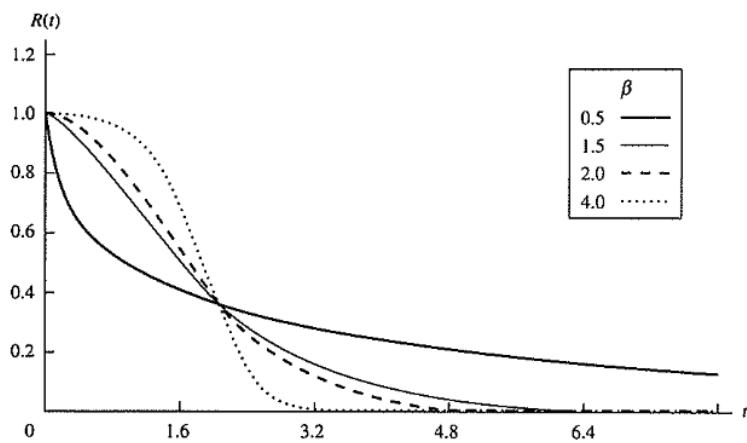


Figura 2.12 El efecto de β sobre la función de confiabilidad Weibull.

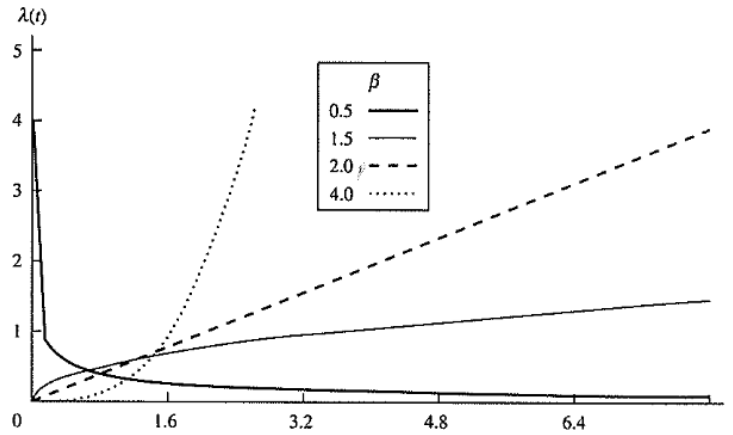


Figura 2.13 El efecto de β sobre la curva de la tasa de riesgo Weibull.

Theta (θ) es un parámetro de escala que tiene influencia sobre la media y la dispersión de la distribución. El efecto de θ sobre la dispersión de la función de densidad de probabilidad se muestra en la Figura 2.14 para varios valores diferentes. Como se observa en la Figura 2.15, si θ se incrementa, la confiabilidad incrementa en un punto dado en el tiempo. En la Figura 2.16, la pendiente de la tasa de riesgo disminuye a medida que θ se incrementa. La curva de la tasa de riesgo es lineal en este ejemplo una vez que $\beta = 2$. El parámetro θ es también llamado la *característica de vida*, y tiene unidades idénticas a las del tiempo de fallo T .

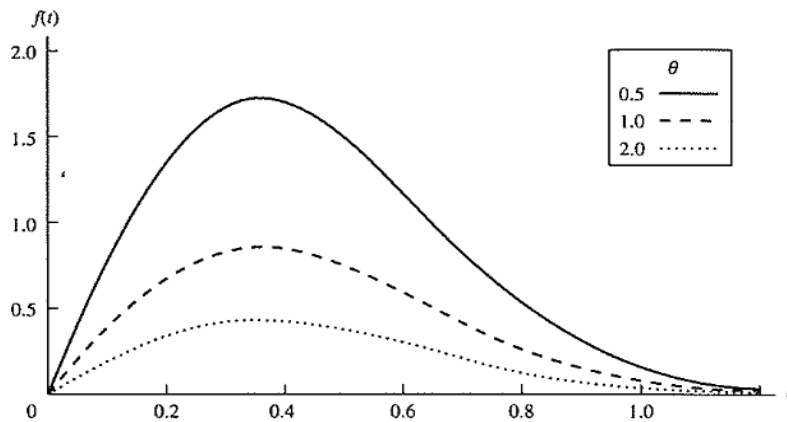


Figura 2.14 El efecto de θ sobre la función de densidad de probabilidad Weibull.

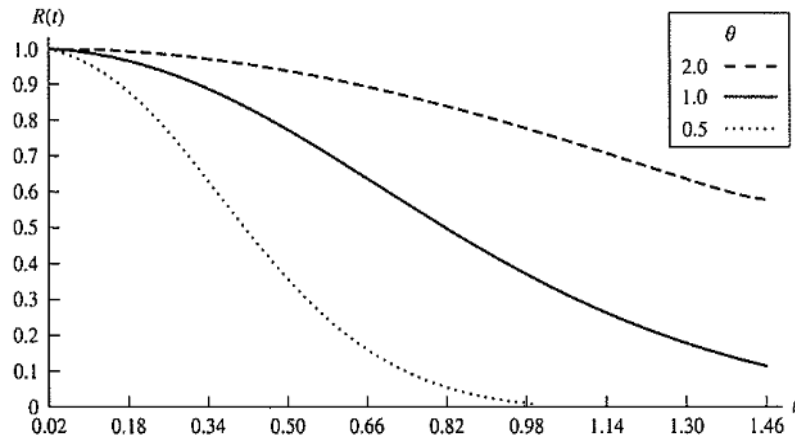


Figura 2.15 El efecto de θ sobre la función de confiabilidad Weibull.

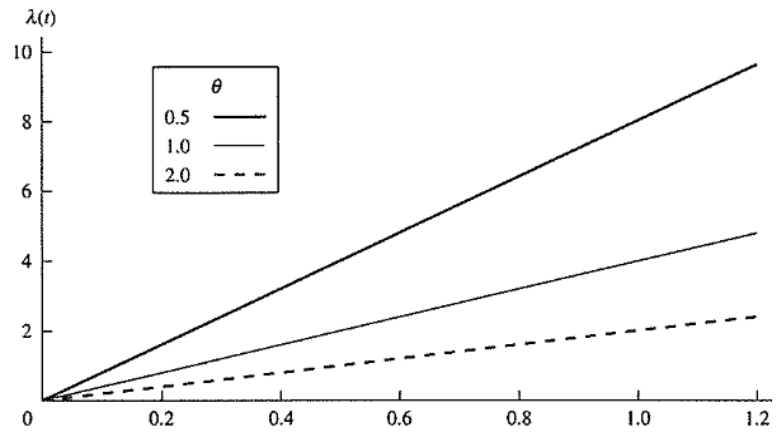


Figura 2.16 El efecto de θ sobre la curva de la tasa de riesgo Weibull.

Siempre que $\beta = 2$, la tasa de riesgo o fallo es lineal (LFR), y la distribución Weibull toma la forma de la distribución Rayleigh.

El valor del parámetro de forma β proporciona información sobre el comportamiento del proceso de fallo. La Tabla 2.1 resume este comportamiento. Una tasa de riesgo creciente puede aumentar a una tasa decreciente (cóncava), incrementar a una tasa constante (lineal) o incrementar a una tasa decreciente (convexa), dependiendo de β como se muestra en la Tabla 2.1. Las funciones de tasa de riesgo que incrementan a una tasa creciente reflejan un muy agresivo fenómeno de desgaste. La curva de la tasa de riesgo en la Figura 2.13 para $\beta = 4$ es convexa y para $\beta = 1.5$ es cóncava. No es de extrañar que la Weibull proporcione un buen modelo para muchos de los datos de fallo encontrados en la práctica, considerando la variedad de formas y propiedades que se pueden obtener.

Tabla 2.1 Parámetros de la forma Weibull.

Valor	Propiedad
$0 < \beta < 1$	Tasa de fallo decreciente (DFR)
$\beta = 1$	Distribución exponencial (CFR)
$1 < \beta < 2$	IFR, cóncava
$\beta = 2$	Distribución Rayleigh (LFR)
$\beta > 2$	IFR, convexa.
$3 \leq \beta \leq 4$	IFR, Aproximación a la distribución normal: simétrica

El MTTF y la varianza de la distribución Weibull se encuentran de

$$MTTF = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.51)$$

y

$$\sigma^2 = \theta^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\} \quad (2.52)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$$

Dada una confiabilidad R deseada,

$$R(t) = e^{-(t/\theta)^\beta} = R$$

La vida de diseño es encontrada de

$$t_R = \theta(-\ln R)^{1/\beta} \quad (2.53)$$

Cuando $R = 0.99$, $t_{0.99}$, se conoce como la vida B1, es decir, el tiempo en el cual el 1 por ciento de la población habrá fallado.

Debido a que la mediana es una medida más representativa de tendencia central para datos altamente sesgados, puede ser preferible al MTTF cuando β es pequeño (es decir, menor que 3). La moda de una distribución puede encontrarse resolviendo para t^* tal que

$$t^* = \max_{t \geq 0} f(t)$$

Lo cual resulta en

$$t_{mode} = \begin{cases} \theta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta} & \text{para } \beta > 1 \\ 0 & \text{para } \beta \leq 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

Usando la confiabilidad condicional según lo definido por la ecuación 2.47, para el modelo Weibull, tenemos que

$$R(t|T_0) = \frac{\exp\{-(t + T_0)/\theta\}^\beta}{\exp[-(T_0/\theta)^\beta]} = \exp\left[-\left(\frac{t + T_0}{\theta}\right)^\beta + \left(\frac{T_0}{\theta}\right)^\beta\right]$$

Siempre que hay una vida mínima t_0 tal que $T > t_0$, la Weibull 3-parametros puede ser apropiada. Esta distribución asume que las fallas no ocurrirán al tiempo t_0 . Para esta distribución,

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t - t_0}{\theta}\right)^\beta\right] \quad t \geq t_0 \quad (2.55)$$

y

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t - t_0}{\theta}\right)^{\beta-1} \quad t \geq t_0 \quad (2.56)$$

El parámetro t_0 es llamado el *parámetro de localización*. La varianza de la distribución es la misma que en el modelo de 2-parametros. Sin embargo,

$$MTTF = t_0 + \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.57)$$

$$t_{med} = t_0 + \theta(0.69315)^{1/\beta} \quad (2.58)$$

y la vida de diseño t_R correspondiente a la confiabilidad de R es

$$t_R = t_0 + \theta(-\ln R)^{1/\beta} \quad (2.59)$$

Es posible transformar la Weibull de 3-parametros en la Weibull de 2-parametros con la transformación $t' = t - t_0$.

2.2.3 La distribución Normal

La distribución normal, también conocida como la distribución de Gauss, es la distribución de propósito general más ampliamente utilizada. Es por esta razón por la que se incluye entre las distribuciones de tiempo de vida de uso común para el análisis de datos de vida y de confiabilidad. Hay quienes sostienen que la distribución normal es inapropiada para el modelado de datos de vida, porque el límite izquierdo de la distribución se extiende hasta el infinito negativo. Esto posiblemente podría resultar en el modelado de los tiempos de fallo negativos. Sin embargo, siempre que la distribución en cuestión tiene una media relativamente alta y una desviación estándar relativamente pequeña, el asunto de tiempos de fallo negativos no debe presentarse como un problema. Sin embargo, la distribución normal ha demostrado ser útil para modelar la vida útil de los artículos consumibles, tales como cartuchos de tóner de la impresora (ReliaSoft, 2014).

La función de densidad de la normal proporciona la familiar curva en forma de campana que se muestra en la Figura 2.17. La fórmula para la PDF es

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.60)$$

Donde:

μ = media de los tiempos de fallo normales.

σ = desviación estándar de los tiempos de fallo.

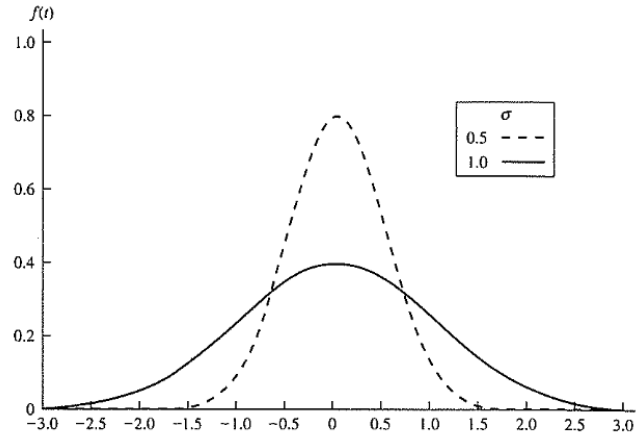


Figura 2.17 El efecto de la desviación estándar σ sobre la función de densidad e probabilidad normal.

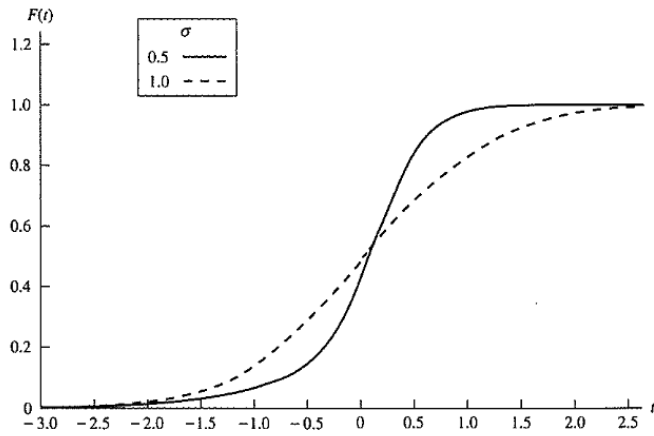


Figura 2.18 El efecto de la desviación estándar σ sobre la función de distribución acumulada normal.

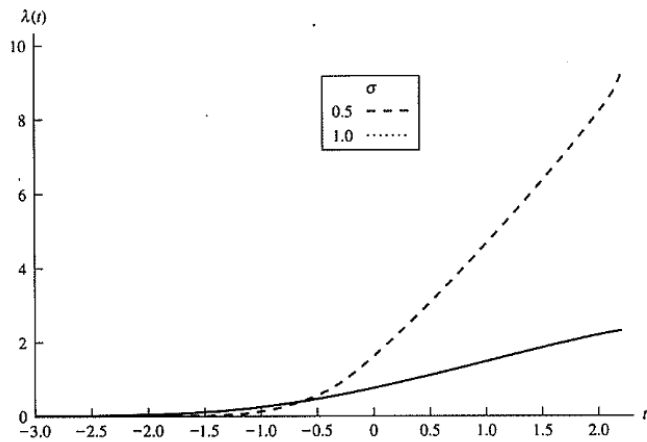


Figura 2.19 El efecto de la desviación estándar σ sobre la tasa de riesgo.

Los parámetros de la distribución μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución respectivamente. La normal no es una verdadera distribución de confiabilidad debido a que la variable aleatoria cambia de menos infinito a más infinito. Sin embargo, para los valores más

observados de μ y σ , la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores negativos es insignificante y lo normal puede por lo tanto ser una aproximación razonable a un proceso de fallo (Ebeling, 2010).

La función de confiabilidad para esta distribución es determinada por

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t' - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dt' \quad (2.61)$$

Por lo tanto, no existe solución compacta a esta integral y debe ser evaluada numéricamente. Si se hace la transformación

$$z = \frac{T - \mu}{\sigma}$$

Entonces z será normalmente distribuida con media cero y una varianza de uno. La PDF para z está dada por

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (2.62)$$

y z se conoce como *variable normal estandarizada*. Su función de distribución acumulada es

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z') dz' \quad (2.63)$$

Por lo tanto, en general,

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.64)$$

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.65)$$

La figura 2.18 muestra la forma de la CDF para dos diferentes valores de σ . La función de riesgo esta determinada por

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)} \quad (2.66)$$

Se puede observar que es una función creciente, como se muestra en la Figura 2.19. Por lo tanto, la distribución normal puede ser utilizada para modelar únicamente fenómenos de fatiga y desgaste (IFR). Debido a su relación con la distribución lognormal, también es útil en el análisis de probabilidades logarítmicas normales (Ebeling, 2010).

La función de confiabilidad normal está determinada por

$$R(t) = n \int_t^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.67)$$

La media o MTTF es actualmente uno de los parámetros de la distribución, usualmente denominada como μ . Debido a que la distribución normal es simétrica, la mediana y la moda son siempre igual a la media.

$$MTTF = t_{med} = t_{mode}$$

2.2.4 La distribución lognormal

La distribución logarítmica normal se utiliza comúnmente para modelar la vida de las unidades cuyos modos de fallo son de naturaleza fatiga de estrés. Dado que esto incluye la mayoría, si no es que, a todos los sistemas mecánicos, la distribución lognormal puede tener una amplia aplicación. En consecuencia, la distribución logarítmica normal es un buen compañero de la distribución de Weibull al intentar modelar este tipo de unidades. Como puede suponerse por el nombre, la distribución lognormal tiene ciertas similitudes con la distribución normal. Una variable aleatoria está distribuida log normalmente si el logaritmo de la variable aleatoria se distribuye normalmente. Debido a esto, hay muchas similitudes matemáticas entre las dos distribuciones (ReliaSoft, 2014).

La PDF está dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} st} \exp\left[-\frac{1}{2s^2} \left(\ln \frac{t}{t_{med}}\right)^2\right] \quad t \geq 0 \quad (2.68)$$

Donde el parámetro s es un parámetro de forma y t_{med} el parámetro de localización es el tiempo mediano del fallo. La distribución es definida únicamente por valores positivos de t y es por lo tanto más apropiada que la normal como distribución de fallo.

Ebeling (2010) proporciona algunos ejemplos de la función de densidad de probabilidad lognormal para diferentes valores del parámetro de forma se muestran en la Figura 2.20. Así como la distribución Weibull, la lognormal puede tomar una variedad de formas. Es frecuentemente el caso de que los datos que se ajusten a una distribución de Weibull también ajustan a una distribución lognormal.

La media, varianza y moda de la lognormal son

$$MTTF = t_{med} \exp(s^2/2) \quad (2.69)$$

$$\sigma^2 = t_{med}^2 \exp(s^2) [\exp(s^2) - 1] \quad (2.70)$$

$$t_{mode} = \frac{t_{med}}{\exp(s^2)} \quad (2.71)$$

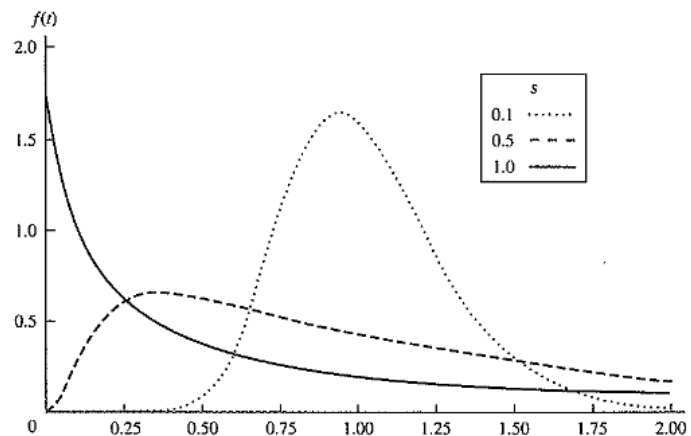


Figura 2.20 El efecto del parámetro de forma s sobre la función de densidad de probabilidad lognormal.

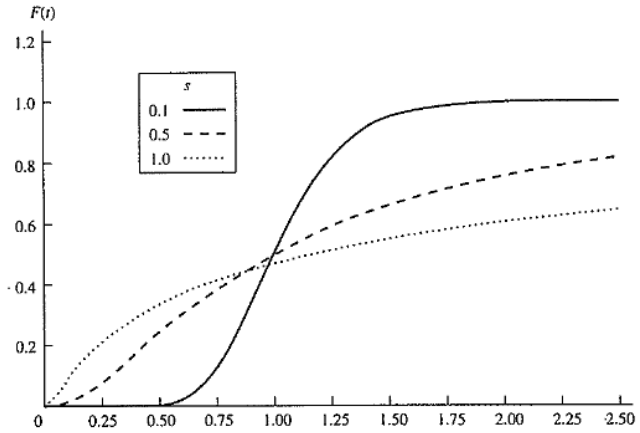


Figura 2.21 El efecto del parámetro de forma s sobre la función de distribución acumulada

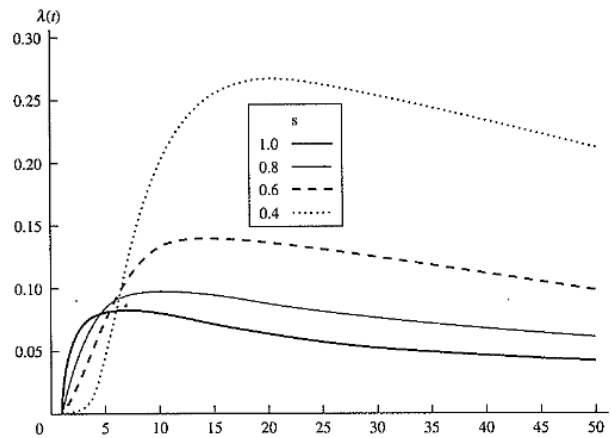


Figura 2.22 El efecto del parámetro de forma s sobre la curva de la tasa de riesgo lognormal.

Para calcular probabilidades de fallo, la relación lognormal a la normal es utilizada. Esta relación entre las distribuciones lognormal y normal se resume en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2 Relación entre las distribuciones lognormal y normal.

Distribución	Lognormal	Normal
Media	$t_{med} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)$	$\ln t_{med}$
Varianza	$t_{med}^2 \exp(s^2) [\exp(s^2) - 1]$	s^2
*Dado que T es una variable aleatoria lognormal		

Debido a que el logaritmo es una función monótonamente creciente,

$$F(t) = Pr\{T \leq t\} = Pr\{\ln T \leq \ln t\}$$

$$\begin{aligned}
&= Pr \left\{ \frac{\ln T - \ln t_{med}}{s} \leq \frac{\ln t - \ln t_{med}}{s} \right\} \\
&= Pr \left\{ z \leq \frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}} \right\} \\
&= \Phi \left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}} \right)
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Entonces

$$R(t) = 1 - \Phi \left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}} \right) \tag{2.73}$$

La Figura 2.21 es una gráfica de la CDF para diferentes parámetros de forma para $t_{med} = 1.0$. La tasa de riesgo para la distribución lognormal al igual que la distribución normal, no se puede resolver analíticamente. Sin embargo, como se hizo en la Figura 2.22, la tasa de riesgo lognormal se puede calcular numéricamente en puntos seleccionados en el tiempo mediante la búsqueda de $f(t)/R(t)$ utilizando las ecuaciones (2.68) y (2.73).

2.2.5 La distribución Gamma

La distribución gamma es un modelo de distribución de vida flexible que a menudo puede ofrecer un buen ajuste para algunos conjuntos de datos de falla. No es, sin embargo, ampliamente utilizado como un modelo de distribución de la vida de los mecanismos de falla comunes. La distribución gamma surge naturalmente como la distribución de tiempo hasta el primer fallo para un sistema con esperas exponencialmente distribuidas, y también es un buen ajuste para la suma de variables aleatorias exponenciales independientes. La distribución gamma a veces se denomina distribución Erlang, que se utiliza con frecuencia en aplicaciones de la teoría de colas (ReliaSoft, 2014).

La función de densidad de probabilidad gamma está dada por:

$$f(t) = \frac{t^{\gamma-1} e^{-t/\alpha}}{\alpha^{\gamma} \Gamma(\gamma)} \quad \gamma, \alpha > 0 \text{ y } t \geq 0 \tag{2.74}$$

La distribución gamma tiene dos parámetros: un parámetro de forma γ y un parámetro de escala α . La CDF es

$$F(t) = \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1} e^{-t'/\alpha}}{\alpha^\gamma \Gamma(\gamma)} dt' = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{t/\alpha} y^{\gamma-1} e^{-y} dy = \frac{I\left(\frac{t}{\alpha}, \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)}$$

Donde

$$y = \frac{t'}{\alpha} \quad e \quad I\left(\frac{t}{\alpha}, \gamma\right) = \int_0^{t/\alpha} y^{\gamma-1} e^{-y} dy$$

Por lo tanto

$$R(t) = 1 - \frac{I\left(\frac{t}{\alpha}, \gamma\right)}{\Gamma(\gamma)} \quad (2.75)$$

$I\left(\frac{t}{\alpha}, \gamma\right)$ es la función gamma incompleta, la cual debe ser evaluada numéricamente. Esta quizá explique porque la distribución gamma no ha sido tan popular como la distribución Weibull.

La media de la distribución es $MTTF = \gamma\alpha$

La varianza está dada por $\sigma^2 = \gamma\alpha^2$.

La moda está dada por $t_{mode} = \alpha(\gamma - 1)$

La distribución gamma toma una gran variedad de formas similar a la Weibull.

Cuando $\gamma = 1$, se puede observar a partir de la función de densidad que la distribución resultante es exponencial con media igual a α . El comportamiento de la función de la tasa de riesgo depende de los valores de γ and asymptotically approaches $1/\alpha$ as $t \rightarrow \infty$.

Tabla 2.3 Efecto del parámetro γ en la función de tasa de riesgo

Parámetro de forma	Función de la tasa de riesgo
$0 < \gamma < 1$	DFR
$\gamma = 1$	CFR
$\gamma > 1$	IFR

La distribución gamma tiene una propiedad aditiva útil en la cual la suma de n variables aleatorias gamma independientes tienen parámetros de forma de $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ y un parámetro de escala de α es también una variable aleatoria gamma con un parámetro de forma de $\sum \gamma_i$ y el parámetro de escala de α .

Ejemplos del efecto del parámetro de forma que tiene sobre la función de densidad y la función de la tasa de riesgo se muestra en la Figura 2.23 y Figura 2.24.

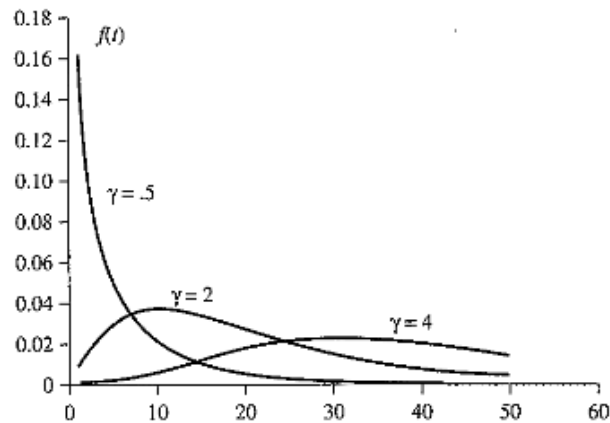


Figura 2.23 El efecto del parámetro de forma sobre la función de densidad de probabilidad gamma. El parámetro de escala se ha fijado en 10.

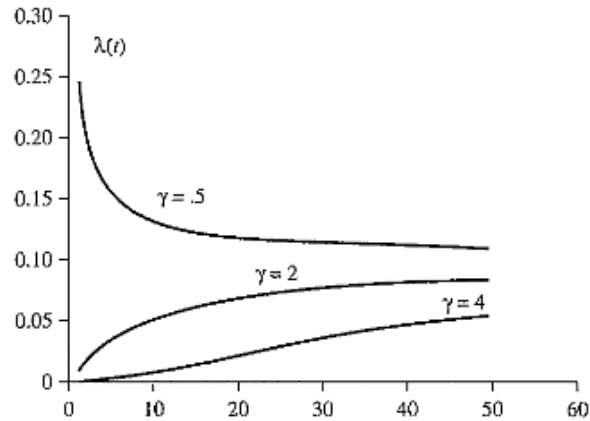


Figura 2.24 El efecto del parámetro de forma sobre la tasa de riesgo gamma. El parámetro de escala se ha fijado en 10.

2.3 Pruebas de Vida Acelerada (ALT)

Dado que los dispositivos cada día son más y más confiable, la medición de su confiabilidad se vuelve más y más difícil: un gran número de dispositivos necesitan ser probados a una extensa cantidad de tiempo bajo condiciones normales de funcionamiento con el fin de obtener mediciones precisas de sus confiabilidades. Un método comúnmente usado para estimar la confiabilidad de tales sistemas en un tiempo mucho más corto son las pruebas de la vida acelerada (Balakrishnan, 2010).

Una prueba de vida es aquella en la cual un artículo o producto de interés, se somete a un esfuerzo en condiciones ambientales mayores a las que típicamente estará operando. Los principales objetivos de acelerar la vida de un producto son: estimar la distribución de vida de dicho producto, identificar fallas en el diseño, medir y demostrar la confiabilidad (Jiménez, 2009).

Los modelos de ALT tiene las siguientes dos componentes: Una distribución de vida que representa la dispersión de la vida del producto y la relación vida esfuerzo. Las distribuciones más usuales para pruebas de vida son: exponencial, normal, lognormal, Weibull y de valores extremos (Gumbel).

Las ALT son muy usadas en la industria manufacturera, particularmente para obtener información de la confiabilidad de sus componentes y materiales. Existe una gran variedad de métodos estadísticos en la aceleración de la vida de un producto complicado que puede fallar de

diferentes maneras. Generalmente, la información de las pruebas a altos niveles de una o más variables de aceleración o esfuerzo (como pueden ser temperatura, voltaje o presión) se utiliza para estimar la distribución de vida del producto.

El término aceleración tiene varios significados en el campo de la confiabilidad, pero el término generalmente implica ir más rápido, de tal forma que la información de la confiabilidad pueda obtenerse más rápidamente. Existen diferentes tipos de pruebas de confiabilidad en las fases del proceso de producción del producto, las más comunes son pruebas de vida acelerada y pruebas de degradación acelerada.

La relación existente entre la vida y el esfuerzo no siempre es el mismo, éste puede ser constante o no, en este trabajo sólo se estudiarán pruebas con esfuerzo constante, ya que es más común que las unidades trabajen con el mismo esfuerzo durante el tiempo de la prueba.

En cualquier caso, se necesita el uso de una distribución de prueba de vida, dependiendo de la distribución utilizada, se tiene los modelos para pruebas de vida acelerada, por ejemplo, si la relación es potencia inversa y se usa la distribución Weibull, se tiene el modelo potencia inversa Weibull. En el ejemplo que se mostrara en este trabajo, el esfuerzo utilizado es la temperatura y la distribución de vida que se supone es la lognormal, por lo que se usará el modelo Arrhenius lognormal, a continuación, se describe dicho modelo.

2.3.1 Métodos de aceleración

Hay tres métodos diferentes de acelerar una prueba de fiabilidad: Aumentar la tasa de uso del producto. Considere la fiabilidad de una tostadora, que está diseñado para una vida media de 20 años, suponiendo una tasa de uso de dos veces cada día. Si, en cambio, probamos el tostador 365 veces al día, podríamos reducir el tiempo de vida media de unos 40 días. También, debido a que no es necesario disponer de todas las unidades fallan en una prueba de vida, información de fiabilidad útil podría obtenerse en cuestión de días en lugar de meses. Aumentar la tasa de envejecimiento del producto. Por ejemplo, aumentar el nivel de variables experimentales como la temperatura o la humedad puede acelerar los procesos químicos de ciertos mecanismos de fallo, tales como la degradación química (resultando en eventual debilitamiento y el fracaso) de un adhesivo de unión mecánica o el crecimiento de un filamento a través de la realización de un

aislador (eventualmente causar un corto circuito). Aumentar el nivel de estrés (por ejemplo, los ciclos de temperatura, voltaje o presión) en las que operan las unidades de prueba. Una unidad fallará cuando su fuerza cae por debajo de la tensión aplicada. Por lo tanto, una unidad a una tensión alta generalmente fallará más rápidamente de lo que hubiera fallado a baja tensión. También se emplean combinaciones de estos métodos de aceleración. Variables como el voltaje y ciclos de temperatura pueden tanto aumentar la velocidad de una reacción electroquímica (acelerando así la velocidad de envejecimiento) y aumentar la tensión en relación con la fuerza. En tales situaciones, cuando se complica el efecto de una variable de aceleración, puede que no haya conocimiento físico suficiente para proporcionar un modelo físico adecuado para la aceleración (y extrapolación). Los modelos empíricos pueden o no ser útil para la extrapolación a condiciones de uso (Meeker & Escobar, 1998).

2.3.2 Carga de estrés

La carga de estrés en una prueba de vida acelerada puede ser aplicada de varias formas en la que hay diferentes tipos de cargas que pueden ser consideradas cuando se realiza una prueba de vida acelerada. Las pruebas de vida acelerada pueden ser clasificadas como estrés constante, estrés paso a paso, estrés cíclico, estrés aleatorio, etc. Estos tipos de cargas se clasifican de acuerdo a la dependencia del estrés con respecto al tiempo. Hay dos posibles esquemas de carga de estrés, cargas en las que el estrés es independiente del tiempo y cargas en las que el estrés es dependiente del tiempo. El tratamiento matemático, los modelos y los supuestos varían dependiendo de la relación estrés y tiempo (ReliaSoft, 2014).

2.3.2.1 Estrés independiente del tiempo (Estrés constante)

La carga de estrés más común es el estrés constante. Cuando el estrés es independiente del tiempo, el estrés aplicado a una muestra de unidades no varía. En otras palabras, si la temperatura es un estrés térmico, cada unidad es probada bajo la misma temperatura acelerada (por ejemplo 100°C) y los datos son registrados. La Figura 2.25 representa el estrés constante en el tiempo.

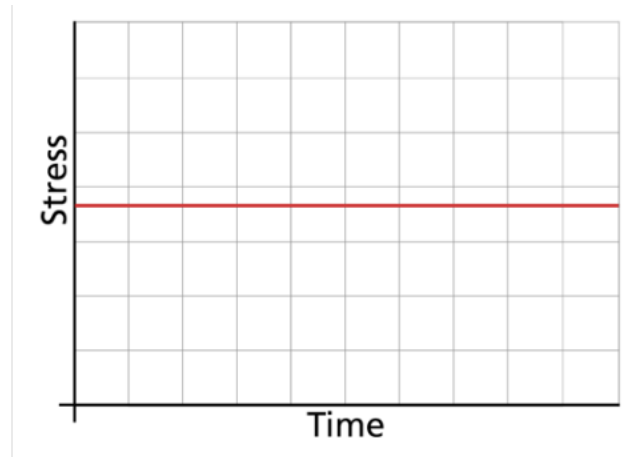


Figura 2.25 Estrés constante en el tiempo

2.3.2.2 Estrés dependiente del tiempo

Cuando el estrés es dependiente del tiempo, el producto está sujeto a un nivel de estrés que varía con el tiempo. Los productos sujetos a cargas de estrés dependientes del tiempo producirán fallas más rápidamente y modelos que se ajustan a ellos se piensa que son el santo grial de las pruebas de vida acelerada. El modelo de daño acumulado le permitirá analizar información de las pruebas de vida acelerada con perfiles de estrés dependiente del tiempo.

El modelo de estrés paso a paso y el modelo de estrés rampa son casos típicos de pruebas de estrés dependientes del tiempo. En estos casos la carga de estrés permanece constante por un periodo de tiempo y se incrementa en un paso o rampa de uno a otro nivel de estrés diferente, donde permanece constante por otro intervalo de tiempo hasta nuevamente se incrementa en un paso o rampa. En la Figura 2.26 se muestra la carga de estrés paso a paso y en la Figura 2.27 se muestra el estrés rampa.

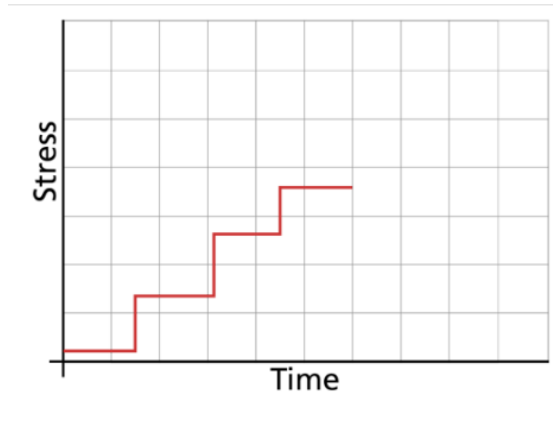


Figura 2.26 Carga de estrés paso a paso.

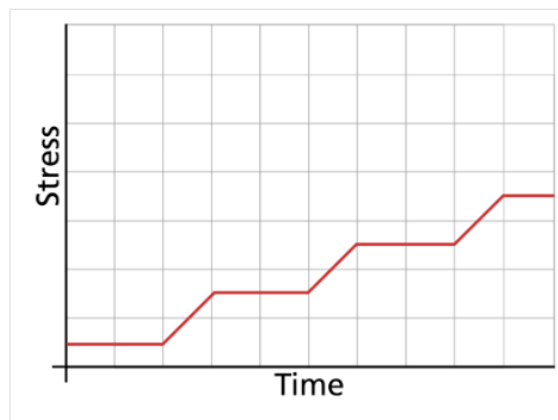


Figura 2.27 Carga de estrés rampa.

La misma idea se puede ampliar para incluir un estrés como una función continua de tiempo. (Véase Figura 2.28 y Figura 2.29).

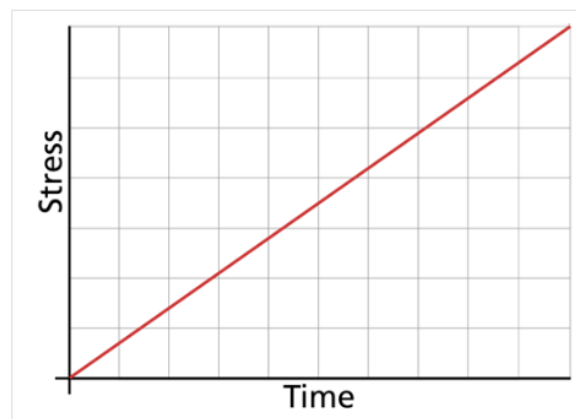


Figura 2.28 Función continua de estrés lineal.

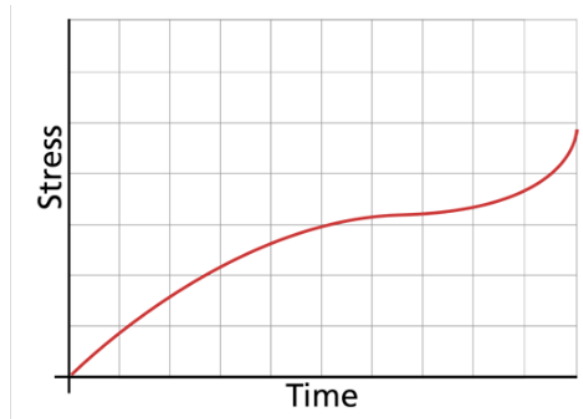


Figura 2.29 Función continua de estrés no lineal.

2.3.3 Datos y tipos de datos

Los modelos estadísticos dependen ampliamente de los datos para hacer predicciones. En el análisis de datos de vida, los modelos son las *distribuciones estadísticas* y los datos son *datos de vida* o *datos de tiempos de fallo* de nuestro producto. En el caso del análisis de datos de vida acelerada, los modelos son las relaciones vida-estrés y los datos son los *datos de tiempos de fallo a un nivel de estrés específico*. La exactitud de cualquier predicción es directamente proporcional a la calidad, exactitud y lo completo de los datos suministrados. Buenos datos junto con la elección del modelo adecuado, por lo general resulta en buenas predicciones. Datos erróneos o insuficientes casi siempre resultará en malas predicciones.

En el análisis de datos de la vida, queremos utilizar todos los conjuntos de datos disponibles, los cuales algunas veces son incompletos o que incluyen la incertidumbre de cuándo se produjo una falla. Por lo tanto, los datos de la vida se pueden separar en dos tipos: los *datos completos* (toda la información está disponible) o *datos censurados* (parte de la información no se encuentra). Cada tipo se explica a continuación.

2.3.3.1 Datos completos

Datos completos significa que el valor de cada unidad de muestra es observado o conocido. Por ejemplo, si tuviéramos que calcular la calificación de la prueba promedio para una muestra de diez estudiantes, los datos completos consistirían en la puntuación conocida para cada estudiante. Del mismo modo en el caso de análisis de datos la vida, nuestro conjunto de datos (si está completo) estaría compuesto de los tiempos de fallo de todas las unidades de la muestra.

Por ejemplo, si probamos cinco unidades y todas fallaron (y se registraron sus tiempos de fallo), entonces tendríamos la información completa en cuanto al tiempo de cada fallo en la muestra.

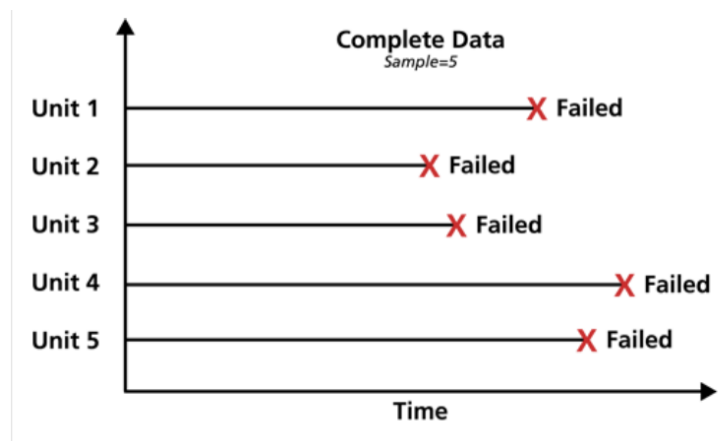


Figura 2.30 Registro de fallos por unidad

2.3.3.2 Datos censurados

En muchos casos, todas las unidades de la muestra pueden no haber fallado (es decir, no se observó el evento de interés) o no se conocen los tiempos de fallo exactos de todas las unidades. Este tipo de datos se les denomina comúnmente *datos censurados*. Hay tres tipos de posibles esquemas de censura, censura a la derecha (también llamados datos suspendidos), censura por intervalo y censura a la izquierda.

2.3.3.3 Datos censurados a la derecha

El caso más común de censura es lo que se conoce como *datos censurados a la derecha* o *datos suspendidos*. En el caso de datos de la vida, estos conjuntos de datos se componen de unidades que no fallan. Por ejemplo, si probamos cinco unidades y sólo tres fallaron al final de la prueba, tendríamos datos censurados a la derecha (o datos de suspensión) para las dos unidades que no fallaron. El término *censura a la derecha* implica que el evento de interés (es decir, el tiempo de fallo) está a la derecha de nuestro punto de datos. En otras palabras, si las unidades eran para mantenerse en funcionamiento, el fallo sería ocurrir en algún tiempo después de nuestro punto de datos (o hacia la derecha en la escala de tiempo).

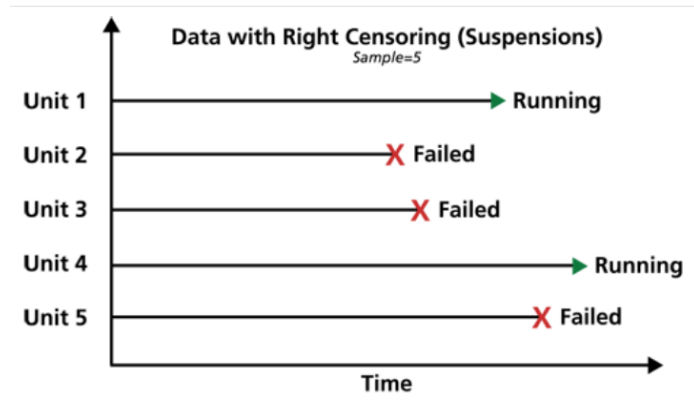


Figura 2.31 Registro de unidades con censura a la derecha.

2.3.3.4 Datos censurados por intervalo

El segundo tipo de censura que comúnmente es comúnmente llamado *datos censurados por intervalo*. Los datos censurados por intervalo reflejan incertidumbre en cuanto al tiempo exacto en el que fallaron las unidades dentro de un intervalo. Este tipo de datos frecuentemente proviene de pruebas o situaciones donde los objetos de interés no se monitorean constantemente. Por ejemplo, si estamos corriendo una prueba en cinco unidades y las inspeccionamos cada 100 horas, sólo sabemos que una unidad falló o no falló entre inspecciones. En concreto, si inspeccionamos una cierta unidad a las 100 horas y la encontramos operando ya continuación, se realiza otra inspección a las 200 horas para encontrar que la unidad ya no está funcionando, entonces la única información que tenemos es que la unidad no falló en algún momento del intervalo entre 100 y 200 horas. Este tipo de datos censurados también se llama *datos de la inspección* por algunos autores.

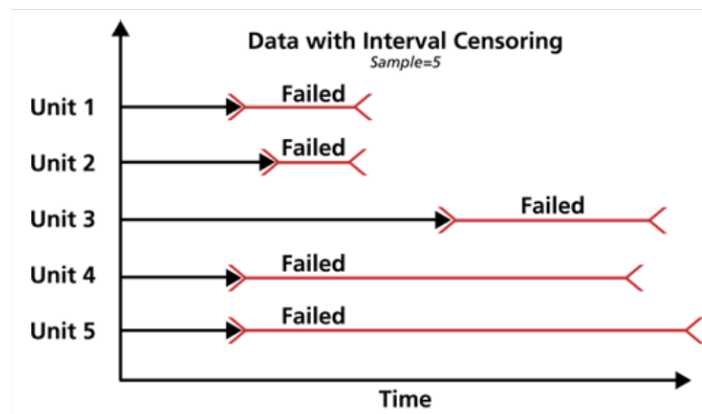


Figura 2.32 Registro de unidades con censura por intervalos.

En general, se recomienda evitar los datos censurados por intervalo porque son menos informativos en comparación con los datos completos. Sin embargo, hay casos en que los datos por intervalo son inevitables debido a la naturaleza del producto, la prueba y el equipo de prueba. En esos casos, se debe tener cuidado de establecer los intervalos de inspección que sean lo suficientemente cortos como para observar la dispersión de fallas. Por ejemplo, si el intervalo de inspección es demasiado largo, todas las unidades en la prueba pueden fallar dentro de ese intervalo, y por lo tanto no se pudo obtener una distribución de fallo.

En el caso de las pruebas de vida acelerada, el conjunto de datos afecta a la exactitud de la relación vida-estrés ajustada, y posteriormente, la extrapolación del estrés a condiciones de uso. En este caso, los intervalos de inspección deben ser elegidos de acuerdo con el factor de aceleración esperada en cada nivel de estrés, y por lo tanto estos intervalos serán de diferentes longitudes para cada nivel de estrés.

2.3.3.5 Datos censurados a la izquierda

El tercer tipo de censura es similar a la censura por intervalo y se llama *datos censurados a la izquierda*. En los datos censurados a la izquierda, un tiempo de fallo es únicamente conocido antes de un cierto tiempo. Por ejemplo, podemos saber que una cierta unidad falló en algún momento antes de 100 horas, pero no exactamente cuándo. En otras palabras, podría haber fallado en cualquier momento entre 0 y 100 horas. Esto es idéntico a los *datos censurados por intervalo* en el cual el tiempo de inicio para el intervalo es cero.

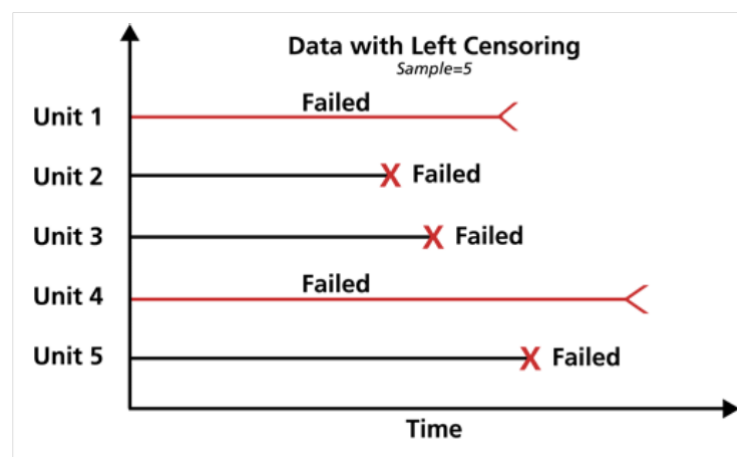


Figura 2.33 Registro de unidades con censura por la izquierda.

2.3.4 Modelos de relación vida-esfuerzo

Los datos de vida típicos de una prueba con estrés constante se representan con una marca x contra el estrés en Figura 2.34. La Figura tiene escalas lineales para la vida y para el estrés. Los tiempos de vida a bajo estrés tienden a ser más largos que los de alto estrés. Además, la dispersión en la vida es mayor a baja tensión que a alta tensión. La curva suave a través de los datos representa la "vida" en función del estrés (Nelson, 2009).

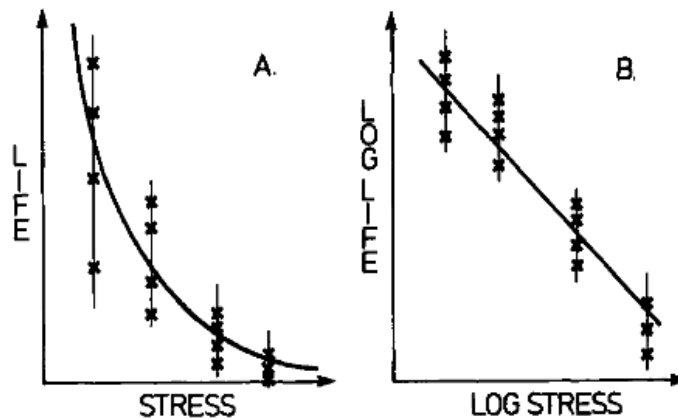


Figura 2.34 Representación de la vida en función del estrés.

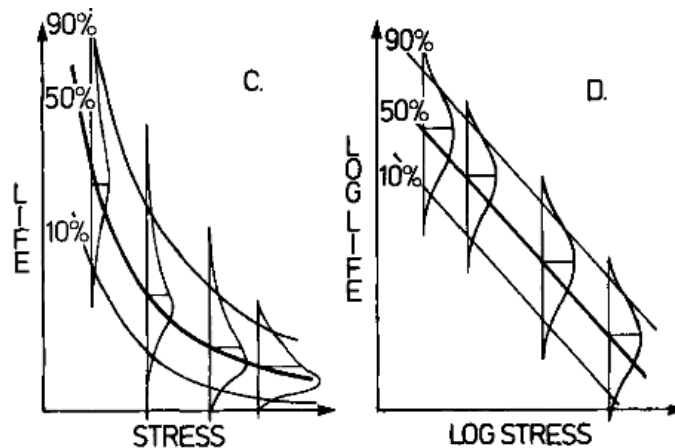


Figura 2.35 Representación de la vida en función del estrés.

Los datos pueden ser conceptualmente más simple cuando se representa en el plano con escalas logarítmicas u otras escalas adecuadas. En una teoría apropiada los puntos trazados tienden a seguir una línea recta, como en Figura 2.11B. Entonces, una línea recta a través de los datos representa la relación vida-estrés entre el producto "vida" y el estrés. Una línea recta es

más fácil para ajustar los datos que una curva. Por otra parte, es matemáticamente fácil de extrapolar en la línea recta a un estrés bajo para estimar la vida útil nominal (característica específica de la distribución de vida), suponiendo que la línea recta es la adecuada. Por otro lado, es difícil extrapolar una curva como la de la Figura 2.34A. El uso de una línea recta en un especial trazado en plano es equivalente a utilizar una ecuación particular para representar la vida contra el estrés.

Una simple relación no describe la dispersión en la vida de las unidades probadas. Para cada nivel de estrés, las unidades tienen cierta distribución estadística de la vida. Un modelo más refinado emplea una distribución estadística para describir la dispersión en la vida. La Figura 2.35C representa tales distribuciones estadísticas. La curva de la densidad de probabilidad (histograma) de la vida a una tensión sería perpendicular al plano, pero se dibujado plano en la figura. Una curva gruesa pasa por el punto de la distribución del estrés en cada 50 por ciento. Curvas más finas pasan a través de los 10 y 90 puntos porcentuales. Una curva de este tipo puede ser imaginada por cualquier percentil. Así, el modelo aquí consiste en una combinación de una distribución de la vida y una relación de vida sin estrés. Las curvas de percentiles representan el modelo.

Muchos de estos modelos son más sencillos de graficar en el plano (con escalas logarítmicas u otras escalas adecuados), donde la relación entre la vida y el estrés es una línea recta. El modelo de la figura 2.35C se representa en la Figura 2.35D sobre el plano en el que la relación es una línea recta. Las relaciones para otros percentiles de las distribuciones de la vida se trazan como líneas rectas paralelas para muchos modelos, como se muestra en la figura. Por ejemplo, los percentiles del modelo de Arrhenius y el modelo de la ley de potencia inversa trazan rectas paralelas en el en el plano. Tales modelos que incorporan una distribución son más realistas que una relación simple. Para un nivel de estrés en particular, cada uno de los modelos proporciona la edad en que, por ejemplo, el uno por ciento o cualquier otro porcentaje de las unidades fallan.

2.3.4.1 Factor de aceleración

El factor de aceleración es un número que no tiene unidades, este relaciona la vida de un producto a un nivel de estrés acelerado con la vida a un nivel de estrés en condiciones de uso normal. Se define por:

$$AF = \frac{Lu}{La} \quad (2.76)$$

Donde:

Lu = La vida a nivel de estrés de utilización.

La = La vida a nivel de estrés acelerado

Como se puede observar, el factor de aceleración depende de la relación vida-esfuerzo (por ejemplo, Arrhenius, Eyring, Potencia Inversa, etc.) y es por tanto una función de estrés.

2.3.4.2 Relación Arrhenius

(Meeker & Escobar, 1998) mencionan en su libro que la alta temperatura es el enemigo de la fiabilidad y aumentar temperatura es uno de los métodos más utilizados para acelerar el fallo de un mecanismo.

Según Nelson (2009), el modelo vida-estrés de Arrhenius es quizá la relación vida-esfuerzo más frecuentemente utilizada en pruebas de vida acelerada que describe el efecto que la temperatura tiene sobre la velocidad de reacción química simple, es decir, es utilizada cuando la variable de aceleración (o de estrés) es térmica (es decir, temperatura). Esta es derivada de la ecuación la reacción de reacción de Arrhenius propuesta por el sueco Svandte Arrhenius en 1887. La ecuación de la razón de reacción Arrhenius está dada como sigue:

$$R(t) = A \exp\left(\frac{-E_A}{K \cdot T}\right) \quad (2.77)$$

Donde $R(t)$ es la velocidad de reacción, E_A es la energía a la cual se activa la reacción, usualmente en volts (eV), $K = 8.6171 \times 10^{-5} = 1/11605$ es la constante de Boltzmann's en electrón volts por °C, $T = °C + 273.15$ es la temperatura absoluta en la escala de Kelvin, A es una característica de falla del producto en condiciones de prueba. Tanto E_A como A son parámetros del modelo que necesitan estimarse.

La energía de activación es la energía que una molécula debe tener para participar en la reacción. En otras palabras, la energía de activación es una medida del efecto que la temperatura

tiene sobre la reacción. El modelo de vida-estrés Arrhenius se formula suponiendo que la vida es proporcional a la velocidad de la reacción inversa del proceso, por lo tanto, la relación de vida-estrés Arrhenius viene dada por:

$$L(V) = Ce^{\frac{B}{V}} \quad (2.78)$$

Donde:

L = medida cuantificable de vida, tal como la vida media, vida característica, vida mediana o vida $B(x)$, etc.

V = nivel de estrés (formulado para valores de temperatura y de temperatura en unidades absolutas, grados Kelvin o grados Rankine).

C = es uno de los parámetros del modelo que se determine, ($C > 0$).

B = es otro parámetro del modelo que se determine.

La relación de Arrhenius puede ser linealizada y graficada sobre un gráfico vida vs estrés, también llamado gráfico Arrhenius. La relación es linealizada tomando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación:

$$\ln(L(V)) = \ln(C) + \frac{B}{V} \quad (2.79)$$

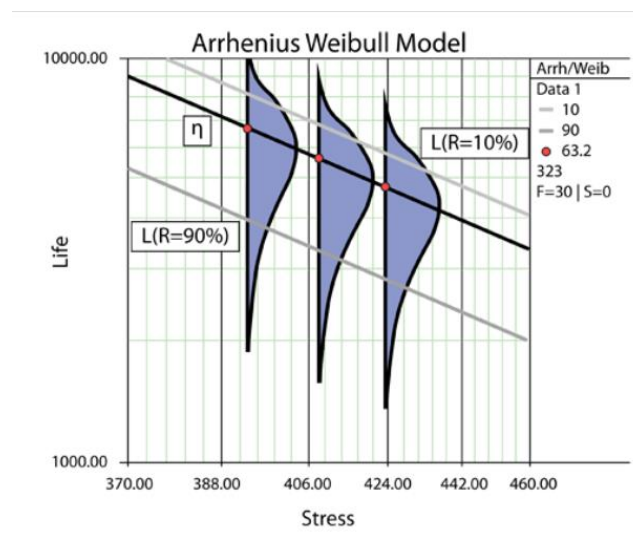


Figura 2.36 Relación vida-esfuerzo Arrhenius para una distribución Weibull con parámetros $Beta=4.29$, $B=1861.61$ y $C=58.98$

El factor de aceleración para el modelo de Arrhenius es:

$$AF = \frac{Lu}{La} = \frac{C e^{\frac{B}{V_u}}}{C e^{\frac{B}{V_a}}} = \frac{e^{\frac{B}{V_u}}}{e^{\frac{B}{V_a}}} = e^{\left(\frac{B}{V_u} - \frac{B}{V_a}\right)} \quad (2.80)$$

2.3.4.3 Relación Eyring

La relación Eyring se formula a partir de principios de la mecánica cuántica y se utiliza con mayor frecuencia cuando el estrés térmico (temperatura) es la variable de aceleración. Sin embargo, la relación Eyring también se utiliza a menudo para las variables de estrés distintas a la temperatura, tales como la humedad. La relación viene dada por:

$$L(V) = \frac{1}{V} e^{-(A-\frac{B}{V})} \quad (2.81)$$

Donde:

L = medida cuantificable de vida, tal como la vida media, vida característica, vida mediana o vida $B(x)$, etc.

V = nivel de estrés (los valores de la temperatura son en unidades absolutas: kelvin o grados Rankine).

C = es uno de los parámetros del modelo que se determine, ($C > 0$).

B = es otro parámetro del modelo que se termine.

La relación Eyring es similar a la relación de Arrhenius. Esta similitud se hace mas aparente si se reescribe de la siguiente forma:

$$L(V) = \frac{1}{V} e^{-(A-\frac{B}{V})} = \frac{e^{-A}}{V} e^{\frac{B}{V}} \quad (2.82)$$

El factor de aceleración para el modelo Eyring está dada por:

$$AF = \frac{Lu}{La} = \frac{\frac{1}{V} e^{-(A-\frac{B}{V_u})}}{\frac{1}{V} e^{-(A-\frac{B}{V_a})}} = \frac{e^{\frac{B}{V_u}}}{e^{\frac{B}{V_a}}} = \frac{V_u}{V_a} e^{B\left(\frac{1}{V_u} - \frac{1}{V_a}\right)} \quad (2.83)$$

2.3.4.4 Relación Potencia Inversa

La relación es a veces llamada la ley de potencia inversa o, simplemente, la ley de potencias. No es popular, pero trata con variables estrés aceleradas no térmicas, el modelo o relación de la ley de potencia inversa (IPL) se utiliza comúnmente para estreses aceleradas no térmicos dadas por:

$$L(V) = \frac{1}{KV^n} \quad (2.84)$$

L = medida cuantificable de vida, tal como la vida media, vida característica, vida mediana o vida $B(x)$, etc.

V = nivel de estrés.

K = es uno de los parámetros del modelo que se determine, ($K > 0$).

n = es otro parámetro del modelo que se termine.

La ley de la potencia inversa aparece como una línea recta cuando se grafica en un plano log-log (véase Figura 2.13). La ecuación de la línea está dada por:

$$\ln(L) = -\ln(K) - n \ln(V) \quad (2.85)$$

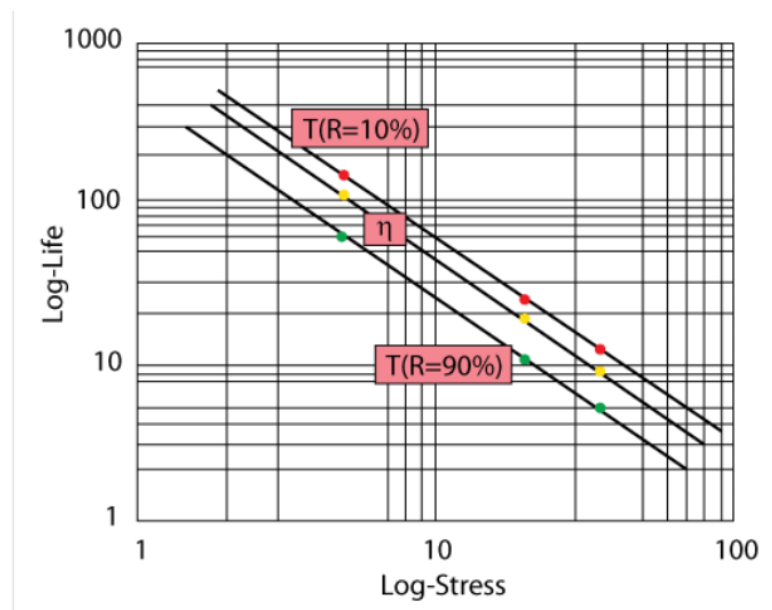


Figura 2.37 Gráfico de la ecuación de la línea de la relación de la ley de la potencia inversa .

El factor de aceleración de la relación de la ley de la potencia inversa está dado por:

$$AF = \frac{Lu}{La} = \frac{1}{\frac{KV_u^n}{V_a^n}} = \left(\frac{V_a}{V_u}\right)^n \quad (2.86)$$

2.3.4.5 Relaciones multivariable

2.3.4.5.1 Relación Log-Lineal General (GLL)

Cuando una prueba consiste en múltiples estreses de aceleración o requiere la inclusión de una variable de ingeniería, es necesaria una relación multivariable general. Tal relación es la relación log-lineal general, que describe una característica de vida como una función de un vector de n estreses o $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. ALTA incluye esta relación y permite hasta ocho estreses. Matemáticamente la relación viene dada por:

$$L(X) = e^{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j} \quad (2.87)$$

Donde:

α_0 y α_j son los parámetros del modelo.

X es un vector de n estreses.

Esta relación se puede modificar adicionalmente mediante el uso de transformaciones y se puede reducir a las relaciones discutidas anteriormente, si así se desea. Como ejemplo, considere una aplicación de un solo estrés de esta relación y una transformación inversa sobre X , de tal manera que $V = 1/X$ o bien:

$$L(V) = e^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{V}} = e^{\alpha_0} e^{\frac{\alpha_1}{V}} \quad (2.88)$$

Se puede observar fácilmente que la relación log-lineal generalizada con un solo estrés y una transformación inversa ha sido reducida a la relación de Arrhenius, donde:

$$C = e^{\alpha_0}, B = \alpha_1; \text{ así } L(V) = C e^{\frac{B}{V}}$$

Del mismo modo, cuando se opta por aplicar una transformación logarítmica de tal forma que, la relación se reduciría a la relación Ley Potencia Inversa. Por otra parte, si más de un estrés está presente, uno puede optar por aplicar una transformación diferente a cada esfuerzo para crear relaciones de combinación similar a la temperatura-humedad. ALTA tiene tres opciones de transformación integradas, a saber:

Tabla 2.4 Transformaciones integradas.

None	$X = V$	Exponencial LSR
Reciprocal	$V = 1/X$	Arrhenius LSR
Logarithmic	$V = \ln(X)$	Potencia LSR

El poder de la relación y esta formulación se hace evidente una vez que uno se da cuenta de que 6,651 (3^8) relaciones únicas de vida de estrés son posibles (al permitir un máximo de ocho estreses). Cuando se combina con las distribuciones de vida disponibles en Alta, se pueden crear casi 20,000 modelos.

Igual que en las relaciones previas, la relación GLL pueda ser combinada con cualquier distribución de vida disponible expresando la característica de vida de esa distribución con la relación GLL. A continuación, se presenta un breve repaso de las modelos de distribuciones GLL.

GLL Exponencial

El modelo GLL-exponencial puede ser derivado asignando $m = L(X)$ en la PDF exponencial, obteniendo la siguiente PDF GLL-exponencial:

$$f(t, X) = e^{-(\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)} e^{-(\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)} \cdot t \quad (2.89)$$

El número total de incógnitas a resolver en este modelo es $n + 1$, es decir, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

GLL Weibull

El modelo GLL-Weibul puede ser derivado asignando $\theta = L(X)$ en la PDF Weibull, produciendo la siguiente PDF GLL-Weibull:

$$f(t, X) = \beta \cdot t^{\beta-1} e^{-\beta(\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)} e^{-t^\beta e^{-(\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)}} \quad (2.90)$$

El número total de incógnitas a resolver en este modelo es $n + 2$, es decir, $\beta, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

GLL-Lognormal

La PDF del modelo GLL-lognormal puede ser derivada asignando de la ecuación 2.87, $t_{med} = L(X)$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} st} \exp \left[\frac{1}{2s^2} \left(\ln \frac{t}{e^{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}} \right)^2 \right] \quad t \geq 0 \quad (2.91)$$

2.3.4.5.2 Modelo de riesgos proporcionales

Introducido por DR Cox, el modelo de riesgos proporcionales (PH) fue desarrollado con el fin de estimar los efectos de diferentes covariables que influyen en los tiempos de fallo de un sistema. El modelo ha sido ampliamente utilizado en el campo biomédico y recientemente ha habido un creciente interés en su aplicación en la ingeniería de confiabilidad. En su forma original, el modelo es no paramétrico, (es decir, no se hacen suposiciones acerca de la naturaleza o la forma de la distribución de falla subyacente). En esta referencia, la formulación no paramétrica original, así como una forma paramétrica del modelo se tendrán en cuenta la utilización de una distribución de la vida Weibull. En el software ALTA, el modelo de riesgos proporcionales está incluido en su forma paramétrica y se puede utilizar para analizar los datos hasta con ocho variables. Los modelos GLL-Weibull y GLL-exponenciales en realidad son casos especiales del modelo de riesgo proporcional. Sin embargo, cuando se utilizan los riesgos proporcionales de ALTA, hay transformación en las covariables (o estrés) que puede llevarse a cabo.

Una razón clave para la popularidad del modelo de Cox es que, a pesar de que el riesgo de referencia no es especificado, razonablemente buenas estimaciones de coeficientes de regresión, coeficientes de riesgo de interés, y las curvas de supervivencia ajustados se puede obtener para una amplia variedad de situaciones de datos. Otra forma de decir esto es que el modelo PH Cox es un modelo "robusto", por lo que los resultados de utilizar el modelo de Cox se aproximarán

estrechamente los resultados para el modelo paramétrico correcta. Por lo tanto, en caso de duda, como suele ser el caso, el modelo de Cox dará resultados fiables suficientes para que sea una opción "segura" de modelo y que el usuario no tiene que preocuparse acerca de si se elige el modelo paramétrico mal. La forma específica del modelo de Cox da la función de riesgo como producto de un riesgo de referencia implica t y una expresión exponencial implica las X 's sin t . La parte exponencial de este producto es atractivo porque asegura que el modelo ajustado siempre dará riesgos estimados que son no negativos (Kleinbaum, 2005).

Aunque tradicionalmente es en el campo de la Bioestadística donde es aplicado más comúnmente el modelo de riesgos proporcionales, este método ha logrado progresivamente más y más prestigio en el campo de la ingeniería y la confiabilidad, y como consecuencia de esto, el número de artículos que ilustran el uso de este tipo de modelos bajo diferentes características ha ido en incremento en la literatura reciente sobre los modelos de confiabilidad.

De acuerdo con el modelo de PH, la tasa de fallo de un sistema es afectado no sólo por su tiempo de funcionamiento, sino también por las covariables en las que opera. Por ejemplo, una unidad puede haber sido probada bajo una combinación de diferentes variables de estrés aceleradas tales como la humedad, temperatura, voltaje, etc. Es claro entonces que tales factores afectan a la tasa de fracaso de una unidad.

La tasa de fracaso instantánea (o tasa de riesgo) de una unidad está dada por:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Tenga en cuenta que para el caso de la tasa de fallo de una unidad es dependiente no sólo del tiempo, sino también de otras covariables, la ecuación anterior debe ser modificada con el fin de ser una función del tiempo y de las covariables. El modelo de riesgos proporcionales asume que la tasa de fracaso (tasa de riesgo) de una unidad es el producto de:

- una tasa de fallo base arbitraria y no especificada $\lambda(t)$, que es una función de tiempo únicamente.

- una función positiva $g(x, A)$, independiente del tiempo, que incorpora los efectos de una serie de covariables como la humedad, temperatura, presión, tensión, etc.

La tasa de fallo de una unidad a continuación, viene dada por:

$$\lambda(t, X) = \lambda_0(t) \cdot g(X, A) \quad (2.92)$$

Donde: X = el vector renglon de las covariables: $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

A = el vector columna de parámetros desconocidos (también llamados parámetros de regresión) del modelo: $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$.

Se asume que la forma $g(X, A)$ es conocida y $\lambda_0(t)$ no está especificada. Se pueden utilizar diferentes formas de $g(X, A)$.

Sin embargo, la forma exponencial es la más utilizada por su simplicidad y está dada por:

$$g(X, A) = e^{A^T X^T} = e^{\sum_{j=1}^m a_j x_j} \quad (2.93)$$

La tasa de fallo puede ser escrita como:

$$\lambda(t, X) = \lambda_0(t) \cdot e^{\sum_{j=1}^m a_j x_j} \quad (2.94)$$

La función de riesgo basal describe cómo el riesgo de fallo, cambia con el tiempo a los niveles básicos de la covariable, y la expresión exponencial describe cómo el riesgo varía en respuesta a las variables explicativas. Con esta función basal es una expresión de tiempo, mientras que la expresión exponencial implica las variables, pero no el tiempo; las variables son entonces llamadas variables independientes del tiempo (Marcelino, 2014).

El modelo de Cox expresa la función de riesgo $\lambda(t)$ en función del tiempo t y de un conjunto de covariables / variables explicativas / predictores / factores de riesgo / variables de confusión, $X = (X_1, \dots, X_p)$, que definen al sujeto en estudio del siguiente modo:

$$\lambda(t, \mathbf{X}) = \lambda(t, X_1, \dots, X_p) = \lambda_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j\right) \quad (2.95)$$

Como hipótesis de partida supondremos que los tiempos de supervivencia tienen distribuciones continuas, que están tomados de forma exacta y que no existe posibilidad de empates. Para cada sujeto i para $i = 1, \dots, n$ conoceremos su tiempo de muerte/fallo t_i , su estado de fallo o censura d_i , variable codificada con 1 si el dato no está censurado y con 0 si el dato sí lo está, y las covariables fijas $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$. Si incluimos el subíndice i para denotar a un sujeto determinado, el modelo (1) se podría re-escribir como:

$$\lambda(t_i, \mathbf{X}_i) = \lambda(t_i, X_{i1}, \dots, X_{ip}) = \lambda_0(t_i) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_{ij}\right) \quad (2.96)$$

A la función $\lambda_0(t_i)$ se la denomina “función de riesgo basal” y corresponde al riesgo de un individuo que tiene como valor en todos los predictores 0, el cual sería el “individuo de referencia” de cara a la interpretación posterior del análisis:

$$\lambda(t, X_1 = 0, \dots, X_p = 0) = \lambda_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j 0\right) = \lambda_0(t) \exp(0) = \lambda_0(t) 1 = \lambda_0(t)$$

También se interpreta que la función de riesgo basal sería aquella función “básica” del modelo si éste no incorporara predictores.

La función de riesgo basal, $\lambda_0(t)$, es la única parte de la expresión del modelo de Cox que depende del tiempo t . La otra parte, $\exp(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j)$, solo depende del vector de covariables $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ de los sujetos, que supondremos “independientes del tiempo”.

Una variable independiente del tiempo se define como una variable cuyos valores no varían a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el sexo, la raza o el grupo de tratamiento son variables fijas, sólo toman un valor, el inicial. También podríamos considerar variables como el hecho de ser o no fumador (estado de fumador) como variable independiente del tiempo, ya que aunque el

estado de fumador puede variar en el tiempo, se suele suponer que para el estudio no varía, se parte de un estado inicial y se supone que no cambia hasta el final, y por lo tanto que sólo toma un valor por individuo. Otro ejemplo de este tipo podría ser la variable “estado inicial de la enfermedad”.

También cabe notar que hay variables cambiantes con seguridad, pero que también se suelen tratar como independientes del tiempo. Por ejemplo, la edad y el peso de los sujetos sí varían con el tiempo, pero puede ser apropiado tratarlas como independientes del tiempo en análisis determinados. Esto es posible siempre que los valores de estos predictores no varíen en exceso a lo largo del tiempo, o bien si el efecto de dichas variables en el riesgo de supervivencia depende esencialmente de un único valor de medición.

Existe la posibilidad de considerar predictores dependientes del tiempo a los que denominaremos $X(t) = (X_1(t), \dots, X_p(t))$. Por ejemplo, el estado corriente de la enfermedad o medidas de tensión arterial sucesivas. En tal caso es posible utilizar la modelización de Cox pero no se suele satisfacer la condición de “riesgos proporcionales” que más abajo definimos. En esta situación en que se tienen en cuenta predictores que dependen del tiempo la regresión se denomina “modelo de Cox ampliado”.

El modelo de Cox (ecuación 2.54) se considera un modelo “semiparamétrico” debido a que incluye una parte paramétrica y otra parte no paramétrica:

La parte paramétrica se corresponde con $\exp(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j)$, es decir, con la exponencial del predictor lineal $\eta = \sum_{j=1}^p \beta_j X_j$. En esta parte del modelo se estiman los parámetros $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ de la regresión mediante la maximización de la denominada función de verosimilitud parcial.

La parte no paramétrica es la función de riesgo basal $h_0(t)$. Ésta es una función arbitraria y no especificada y se estima en un segundo estadio, condicionada a la estimación de los parámetros $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ de la regresión. Es por este componente no paramétrico de la fórmula que el modelo de Cox se considera semiparamétrico.

Una vez estimada la parte paramétrica, $\exp(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j)$, y posteriormente la no paramétrica, $\lambda_0(t)$, tendremos el modelo semiparamétrico completo:

$$\hat{\lambda}(t, \mathbf{X}) = \hat{\lambda}_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j X_j\right)$$

Tal y como ya hemos dicho, en el modelo de Cox $\lambda_0(t)$ no está especificada y por lo tanto la distribución del error tampoco. A diferencia, en un modelo paramétrico la forma funcional está completamente especificada, excepto por los parámetros de la distribución supuesta, los cuáles deben ser estimados. Por ejemplo, en el modelo paramétrico Weibull la función de riesgo queda definida como:

$$\lambda(t, \mathbf{X}) = \theta p t^{p-1}$$

donde $\theta = \exp(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j)$ y $\lambda_0(t) = p t^{p-1}$. En este modelo debemos estimar los parámetros θ , p y β .

El hecho de que el modelo de Cox sea un modelo “semiparamétrico” hace que sea bien recibido en análisis de supervivencia. Al no tener especificada la función de riesgo basal es posible estimar los coeficientes de la regresión, calcular las razones de riesgo y ajustar las curvas de supervivencia a una gran variedad de situaciones.

Podemos decir que el modelo de Cox es “robusto” en el sentido de que los resultados obtenidos en los ajustes tenderán a aproximarse a los del modelo paramétrico correcto.

Por ejemplo, si el modelo paramétrico correcto para el estudio es el Exponencial (o lo mismo para el Weibull) las curvas de supervivencia obtenidas con el modelo de Cox serán similares a las obtenidas con el modelo Exponencial.

Si supiéramos ciertamente cuál es el modelo paramétrico correcto, preferiríamos dicho modelo antes que el modelo de Cox, pero deberíamos estar completamente seguros de que el modelo paramétrico es el apropiado. Aunque podemos utilizar pruebas de bondad de ajuste, es

difícil asegurar que la distribución paramétrica es la correcta. Por lo que el modelo de regresión de Cox resulta una buena alternativa a los modelos paramétricos. Dicho de otro modo, con el modelo de Cox evitamos utilizar un modelo paramétrico incorrecto para el estudio.

Podríamos definir el modelo de regresión de Cox de un modo más general en lo referente a la parte paramétrica:

$$\lambda(t, X) = \lambda_0(t)\psi(\eta) \quad (2.97)$$

La parte $\psi(\eta)$ se interpreta como el riesgo relativo en el momento t de un espécimen con perfil $X = (X_1, \dots, X_p)$ respecto a un espécimen con $X = (0, \dots, 0)$. El modelo (1) se correspondería con $\psi(\eta) = \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j\right)$. Esta parametrización del modelo de Cox se denomina forma “log lineal” y es la más popular. También se consideran la forma “lineal” con $\psi(\eta) = 1 + \sum_{j=1}^p \beta_j X_j$ y la “logística” con $\psi(\eta) = \log\left(1 + \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j\right)\right)$, a parte de alguna familia dependiente de otros parámetros adicionales que obtienen a las lineales (log lineal y lineal) como casos particulares.

Si analizamos la expresión paramétrica del modelo de Cox definida (ecuación 2.96), observaremos que al suponer que el predictor lineal está relacionado con las curvas de riesgo (o funciones de supervivencia) a través de la exponencial, esto nos asegura que nunca obtendremos valores negativos en la estimación del modelo. Esta es una propiedad deseable que la forma lineal no siempre cumple.

Otra propiedad atractiva del modelo de Cox es que aunque la función de riesgo basal no esté especificada es posible estimar los parámetros del predictor lineal. Una vez estimados los coeficientes, podremos también estudiar el efecto de las variables explicativas de interés y calcular los denominados ratios o razones de riesgo que más abajo definimos, todo ello de forma independiente a la estimación de las funciones de riesgo. En el modelo de Cox estimamos en un segundo estadio la función de riesgo $\lambda(t, X)$ (y las correspondientes curvas de supervivencia $S(t, X)$) con muy pocos supuestos ya que la función de riesgo basal, $\lambda_0(t)$ (o de supervivencia

basal, $S_0(t)$ son funciones no especificadas.

Un último punto sobre la “popularidad” del modelo de Cox es que es preferido al modelo de regresión logístico cuando la variable objeto de estudio son tiempos de supervivencia que pueden estar o no censurados, pues el modelo de Cox utiliza más información sobre estos datos que el logístico. El logístico únicamente trata con respuestas del tipo 0 y 1 y no tiene en cuenta las censuras.

Comentar que para el modelo de Cox de riesgos proporcionales se procede de forma análoga que con los modelos lineales o lineales generalizados en lo referente al tratamiento y codificación de predictores, excepto que el término “intercept” o medio queda absorbido por la función de riesgo basal. Se pueden tener en cuenta los efectos principales y también interacciones. En general si incluimos interacciones entre variables, también incluiremos sus efectos principales, aunque éstos se vuelvan menos significativos con la introducción de la interacción. Si la naturaleza del predictor lo permite se pueden hacer transformaciones de las variables para que entren de un modo más adecuado en el modelo, por ejemplo de forma cuadrática o cúbica, o bien estandarizadas por algún método. En el modelo de Cox, y debido a la interpretación que se realiza, interesará tener a predictores continuos discretizados en clases que sean de interés y susceptibles de interpretación en las denominadas razones de riesgo que en breve definiremos.

En el modelo de Cox se busca como primer paso la relación entre los riesgos de muerte de dos individuos expuestos a factores de riesgo diferentes. Para ello, el modelo parte de una hipótesis fundamental, la de que los riesgos son proporcionales.

Para comprender esta noción definiremos previamente la denominada “razón de riesgos” (Hazard Ratio, HR) entre dos sujetos con diferente vector de covariables $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ y $\mathbf{X}^* = (X^*_1, \dots, X^*_p)$ como:

$$HR = \frac{\lambda(t, \mathbf{X}^*)}{\lambda(t, \mathbf{X})} \quad (2.98)$$

Al igual que se realiza con los *odds ratios*, típicamente se evalúa en el numerador el grupo

de mayor riesgo definido por \mathbf{X}^* y en el denominador el grupo de menor riesgo definido por \mathbf{X} . En tal caso se espera que el HR sea mayor que 1, ya que $\lambda(t, \mathbf{X}^*) > \lambda(t, \mathbf{X})$ y cuantifica cuántas veces es mayor el riesgo de morir con perfil \mathbf{X}^* que con \mathbf{X} . Es más fácil la interpretación si excede del valor base unidad que indica que tienen el mismo riesgo, que si disminuye de la unidad. Si sustituimos la expresión del modelo (1) en (3) obtenemos lo siguiente:

$$HR = \frac{\lambda_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j^*\right)}{\lambda_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j\right)} = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j^*\right)}{\exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j\right)} = \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j (X_j^* - X_j)\right),$$

Con lo que

$$HR = \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j (X_j^* - X_j)\right) \quad (2.99)$$

Observamos que el resultado de la razón de riesgo (ecuación 2.98) no depende de la función de riesgo basal, tan sólo del valor de los predictores y de las betas estimadas, i.e., no depende del tiempo. Por lo tanto, en el modelo de Cox se supone la hipótesis de que los riesgos son proporcionales, ya que se suponen covariables no dependientes del tiempo.

La hipótesis de riesgos proporcionales significa explícitamente que la razón de riesgo (ecuación 2.98) es constante en el tiempo: $\lambda(t, \mathbf{X}^*) = constante \times \lambda(t, \mathbf{X})$. Si lo aplicamos a la expresión resultante en el modelo de Cox (ecuación 2.98), denominando a la constante y una vez estimados los coeficientes de la regresión por máxima verosimilitud parcial, tenemos que la razón de proporcionalidad es constante en el tiempo e igual a:

$$\hat{\theta} = \exp\left(\sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j (X_j^* - X_j)\right) \quad (2.100)$$

En el caso de dos individuos, i y j que solo se diferencian den la k -ésima variable, supongamos que X_k vale 0 para i y 1 para j , entonces tenemos que para cualquier tiempo t la denominada razón de riesgo es:

$$HR = \frac{\lambda(t, X_1, \dots, X_{k-1}, 1, X_{k+1}, \dots, X_p)}{\lambda(t, X_1, \dots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \dots, X_p)} \quad (2.101)$$

Y vale exactamente $HR = \exp(\beta_k)$, ya que:

$$HR = \frac{\lambda_0(t) \exp(\beta_1 X_1 + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1} + \beta_k 1 + \beta_{k+1} X_{k+1} + \dots + \beta_p X_p)}{\lambda_0(t) \exp(\beta_1 X_1 + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1} + \beta_k 0 + \beta_{k+1} X_{k+1} + \dots + \beta_p X_p)} =$$

$$\frac{\exp(\beta_1 X_1 + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1} + \beta_k 1 + \beta_{k+1} X_{k+1} + \dots + \beta_p X_p)}{\exp(\beta_1 X_1 + \dots + \beta_{k-1} X_{k-1} + \beta_k 0 + \beta_{k+1} X_{k+1} + \dots + \beta_p X_p)} = \exp(\beta_k).$$

En caso de covariables continuas riesgos al incrementar en una unidad la covariable continuas el $HR = \exp(\beta_j)$ representa la razón de riesgos al incrementar en una unidad la covariable continua X_j . Si nos resulta interesante estimar la razón de riesgos al incrementar la covariable X_j en c unidades, lo haremos mediante $\exp(c\beta_j)$.

Al utilizar la regresión de Cox para unos datos determinados será necesario verificar que se cumple esta hipótesis de proporcionalidad de riesgos. Para ello se suele comprobar que el efecto de cada variable es constante en el tiempo.

Existen varios métodos para estudiar el cumplimiento de la hipótesis de proporcionalidad. Por un lado puede utilizarse un método gráfico: si una variable, por ejemplo, toma únicamente los valores 0 y 1, pueden representarse las curvas de supervivencia para los dos grupos de sujetos definidos por dicha variable y estudiar si son paralelas. No obstante, existen métodos estadísticos algo más rigurosos como el estudio de los denominados residuos de Schoenfeld.

En el modelo de regresión de Cox los parámetros $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ se estiman maximizando el logaritmo de la denominada “función de verosimilitud parcial”. La maximización de dicha función se realiza mediante métodos numéricos, obteniendo de esta forma la estimación $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$. Con la estimación de estos parámetros ya tendremos la componente paramétrica totalmente especificada en el modelo:

$$\lambda(t, \mathbf{X}) = \lambda_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \widehat{\beta}_j X_j\right),$$

y consecuentemente podremos hacer inferencia sobre dicho vector de parámetros y calcular los *HR* de interés para el estudio.

La función de verosimilitud parcial que a continuación vamos a definir, se denomina parcial debido a que tiene en cuenta únicamente en la función de verosimilitud las probabilidades de los tiempos de muerte/fallo y no incluye las probabilidades de los tiempos de datos censurados. Sin embargo, en el cálculo de las probabilidades de los tiempos de muerte sí tiene en cuenta a todos los sujetos (censurados o no *a posteriori*) objeto de riesgo al inicio de los diferentes tiempos de muerte.

Denominamos $L \equiv L(\beta_1, \dots, \beta_p)$ a la función de verosimilitud parcial. Supongamos que tenemos k tiempos de fallo y que no hay empates. Así, tendremos $n - k$ tiempos censurados. Los tiempos de fallo ordenados los denotamos por $t_{(1)}, \dots, t_{(k)}$, y denotamos por $R(t_{(1)})$ para $i = 1, \dots, k$ al conjunto de los sujetos a riesgo en el tiempo $t_{(i)}$. Denominamos por $L_i \equiv L_{t_{(i)}}(\beta_1, \dots, \beta_p)$ para $i = 1, \dots, k$ a las porciones de la verosimilitud total anterior debidas a la aportación de los diferentes tiempos de fallo $t_{(1)}, \dots, t_{(k)}$.

Construiremos la función de verosimilitud total como el producto de cada una de las aportaciones de los k tiempos de fallo:

$$L = \prod_{i=1}^k L_i.$$

Una vez tenemos la verosimilitud total construida hacemos el logaritmo y derivamos respecto de los parámetros:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} \tag{2.102}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \quad (2.103)$$

De la ecuación 2.102, igualando a 0, $\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = 0$ para $j = 1, \dots, p$ obtenemos las ecuaciones que nos permitirán obtener las estimaciones de $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ mediante la utilización de algún método numérico.

De la ecuación 2.103, comprobamos que realmente es un máximo y podemos obtener, como ocurre cuando se trabaja en general con una función de verosimilitud, la “matriz de información (observada)”, $I(\beta)$, donde cada elemento se iguala a:

$$I_{ij}(\beta) = - \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_i \partial \beta_j}.$$

Así, la matriz de varianzas y covarianzas $p \times p$ estimada es $\hat{\Sigma} = I^{-1}(\hat{\beta})$. Cabe notar que este estimador, obtenido a partir de la maximización de la función de verosimilitud parcial es asintóticamente no sesgado, eficiente y normal. Por un lado, el estimador $\hat{\beta}$ estima consistentemente el vector de parámetros β , pero no es completamente eficiente, es decir, no alcanza la cota de Cramer-Rao. Finalmente, la distribución de $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ es aproximadamente normal de media $(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ y matriz de varianzas y covarianzas $\hat{\Sigma}$.

Veamos cuánto vale exactamente cada una de las $L_i \equiv L_{t(i)}(\beta_1, \dots, \beta_p)$ para $i = 1, \dots, k$:

$$L_{t(i)}(\beta_1, \dots, \beta_p) = \frac{h(t(i), \mathbf{X}_{(i)})}{\sum_{l \in R(t(i))} h(t(i), \mathbf{X}_l)} = \frac{h_0(t(i)) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_{(i)j}\right)}{\sum_{l \in R(t(i))} h_0(t(i)) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_{lj}\right)},$$

Siendo $\mathbf{X}_{(i)}$ el vector de covariables para el sujeto con tiempo de fallo $t(i)$ y \mathbf{X}_l para $l \in R(t(i))$ el vector de covariables de cada uno de los sujetos de $R(t(i))$.

Como podemos ver la función de riesgo basal se anula en el numerador y en el denominador, con lo que nos queda la expresión:

$$L_{t_{(i)}}(\beta_1, \dots, \beta_p) = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_{(i)j}\right)}{\sum_{I \in R(t_{(i)})} \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_{ij}\right)} \quad (2.104)$$

Observamos que la función de verosimilitud parcial total así calculada no depende de las cuantías de los tiempos, tan sólo de su ordenación y de si el dato estaba o no censurado. Como consecuencia podríamos obtener las mismas estimaciones de β para distintos datos, siempre que éstos tengan el mismo patrón de orden y censura en los tiempos de supervivencia.

Como ya hemos comentado, a partir de la función de verosimilitud parcial obtenemos una estimación de los coeficientes $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ cuya distribución es aproximadamente normal de media $(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ y matriz de varianzas y covarianzas $\hat{\Sigma}$. Lo que nos permite utilizar tests análogos a los utilizados en un modelo lineal o lineal generalizado.

Una forma paramétrica del modelo de riesgos proporcionales se puede obtener suponiendo una distribución subyacente. En ALTA, las distribuciones Weibull y exponencial están disponibles. Consideraremos la distribución de Weibull para formular el modelo paramétrico de riesgos proporcionales. En otras palabras, se supone que la tasa de fallo de línea de base es paramétrico y dada por la distribución de Weibull. En este caso, la tasa de fallos de línea de base viene dada por:

$$\lambda_0(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

La tasa de fallo PH se convierte en

$$\lambda(t, X) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{\sum_{j=1}^m a_j x_j} \quad (2.105)$$

A menudo es más conveniente definir una covariable adicional $x_0 = 1$, con el fin de permitir que el parámetro de escala de Weibull sea elevado a la beta (parámetro de forma) para ser incluido en el vector de coeficientes de regresión. La tasa de fallo PH puede entonces ser escrita como:

$$\lambda(t, X) = \beta \cdot t^{\beta-1} \cdot e^{\sum_{j=1}^m a_j x_j} \quad (2.106)$$

La función de confiabilidad PH está dada por:

$$R(t, X) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} = e^{-\int_0^t \lambda(u, X) du} = e^{-t^\beta \cdot e^{\sum_{j=1}^m a_j x_j}} \quad (2.107)$$

La PDF puede ser obtenida tomando la derivada parcial de la función de confiabilidad con respecto al tiempo. La PDF del PH es:

$$f(t, X) = \lambda(t, X) \cdot R(t, X) = \beta \cdot t^{\beta-1} \cdot e^{\left[\sum_{j=0}^m a_j x_j - t^\beta \cdot e^{\sum_{j=0}^m a_j x_j} \right]} \quad (2.108)$$

El número total de incógnitas para resolver en este modelo es $m + 2$, es decir, $\beta, \eta, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

El método de estimación de máxima verosimilitud se puede utilizar para determinar estos parámetros. La función de log-verosimilitud para este caso viene dada por:

$$\begin{aligned} \ln(L) = \Lambda = & \sum_{i=1}^{F_e} N_i \ln \left(\beta \cdot T_i^{\beta-1} e^{-T_i^\beta \cdot e^{\sum_{j=0}^m a_j x_{i,j}}} e^{\sum_{j=0}^m a_j x_j} \right) - \sum_{i=1}^S N'_i (T'_i)^\beta e^{\sum_{j=0}^m a_j x_{i,j}} \\ & + \sum_{i=1}^{F_I} N''_i \ln [R''_{Li} - R''_{Ri}] \end{aligned} \quad (2.109)$$

Donde:

$$R''_{Li} = e^{-T_i^\beta \cdot e^{\sum_{j=0}^m a_j x_j}}$$

$$R''_{Ri} = e^{-T_i^\beta \cdot e^{\sum_{j=0}^m a_j x_j}}$$

Resolviendo para los parámetros que maximizan la función log-verosimilitud se obtendrán los parámetros para el modelo PH-Weibull para $\beta = 1$. Nótese que la función de log-verosimilitud se convierte en la función log-verosimilitud para el modelo exponencial-PH, que es similar a la forma original del modelo de riesgos proporcionales de Cox.

Tenga en cuenta que la función de verosimilitud del modelo de GLL es muy similar a la función de verosimilitud para el modelo de riesgos proporcionales Weibull. En particular, el parámetro de forma de la distribución de Weibull se puede incluir en los coeficientes de regresión de la siguiente manera:

$$a_{i,PH} = -\beta \cdot a_{i,GLL} \quad (2.110)$$

Donde:

$a_{i,PH}$ = parámetros del modelo PH.

$a_{i,GLL}$ = parámetros del modelo log-lineal general.

En este caso, las funciones de verosimilitud son idénticas. Por lo tanto, si no se realiza ninguna transformación en las covariables, los valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud del modelo de GLL, también maximizan la función de verosimilitud para el modelo de riesgo-Weibull proporcional. Note que para $\beta = 1$ (distribución de vida exponencial), las dos funciones de verosimilitud son idénticas, y $a_{i,PH} = -a_{i,GLL}$.

Otra ventaja de las relaciones multivariadas incluidas en ALTA es que permiten el análisis simultáneo de variables continuas y categóricas. Las variables categóricas son variables que toman valores discretos tales como la designación del lote de productos de diferentes lotes de fabricación. En este ejemplo, el lote es una variable categórica y este puede ser expresado en términos de variables indicadoras. Una variable indicadora únicamente toma valores de 1 o 0. Por ejemplo, considere una muestra de unidades prueba. Un número de estas unidades fueron obtenidas del lote 1, otras del lote 2 y el resto del lote 3. Estos tres lotes pueden ser representados con el uso de variables indicadoras de la siguiente manera:

Definir dos variables indicadoras X_1 y X_2 .

Para las unidades del lote 1, $X_1 = 1$ y $X_2 = 0$.

Para las unidades del lote 2, $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$.

Para las unidades del lote 3, $X_1 = 0$ y $X_2 = 0$.

Asuma que se llevó a cabo un ensayo acelerado con estas unidades y la temperatura fue el estrés acelerado. En este caso la relación GLL puede ser utilizada para analizar los datos. De la relación GLL tenemos:

$$L(X) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3}$$

Donde:

X_1 y X_2 son variables indicadoras.

$X_3 = \frac{1}{T}$, donde T es la temperatura.

Los datos se pueden introducir en ALTA y, con el supuesto de una distribución de la vida subyacente utilizando un MLE, los parámetros de este modelo se pueden obtener.

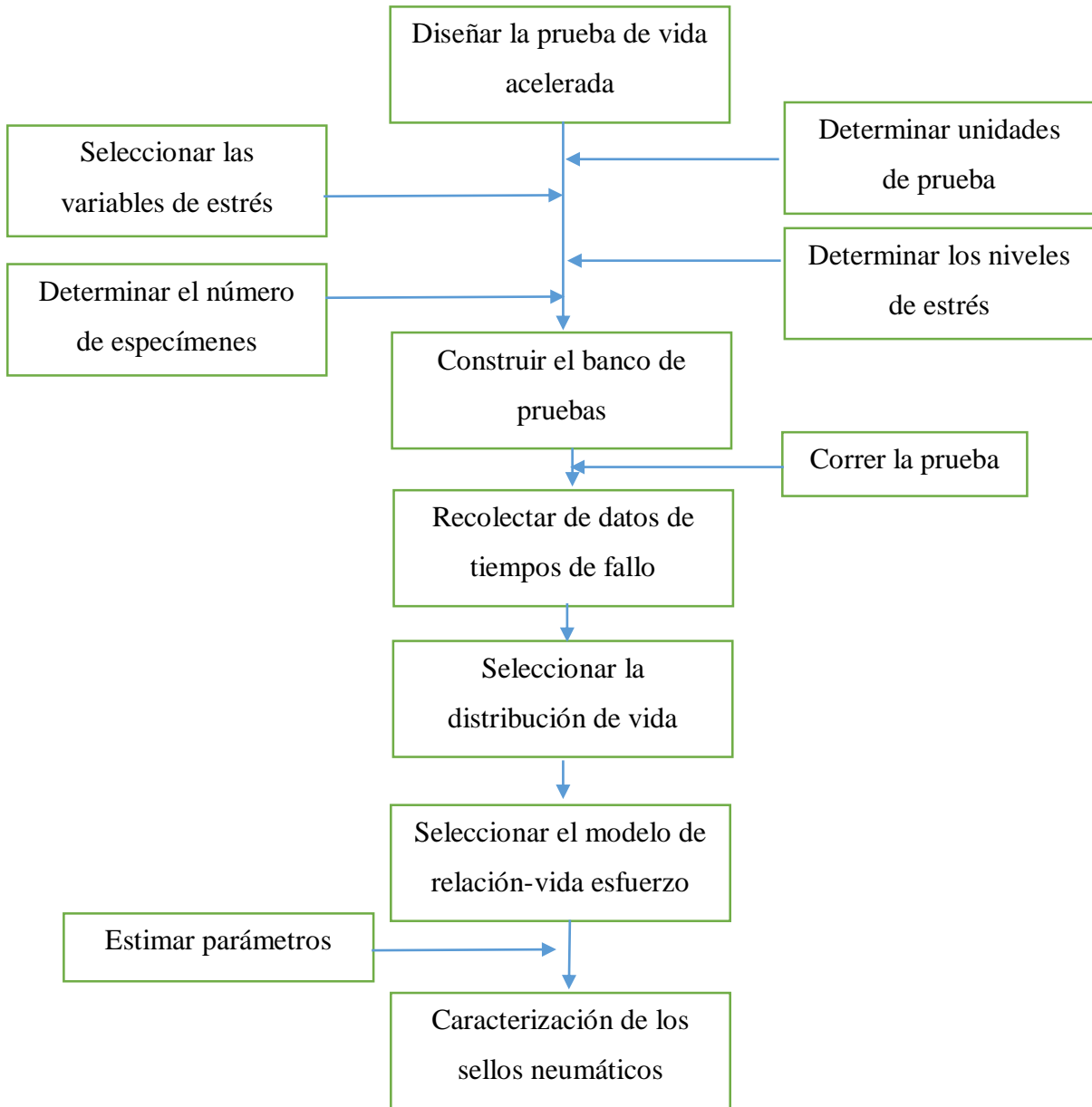
Cuando consideramos variables que cambian su valor con el tiempo, las llamamos dependientes del tiempo y el modelo de Cox cambia de nombre a modelo Cox extendido:

$$\lambda(t, X) = \lambda_0(t) \cdot e^{\left[\sum_{j=1}^m a_{jx_j} + \sum_{j=1}^m b_{jx_j} \right]} \quad (2.111)$$

Donde $\sum_{j=1}^m a_{jx_j}$ es independiente del tiempo y $\sum_{j=1}^m b_{jx_j}$ es dependiente del tiempo

Capítulo 3

3. Metodología



3.1 Diseño de la prueba

3.1.1 Unidades de prueba

Los especímenes a los que se les realizara las ALT son sellos de pistón neumáticos de poliuretano de perfil UNP, un producto que se encuentra en fase de prueba. La Figura 3.1 y Figura 3.2 son imágenes de sellos de pistón.

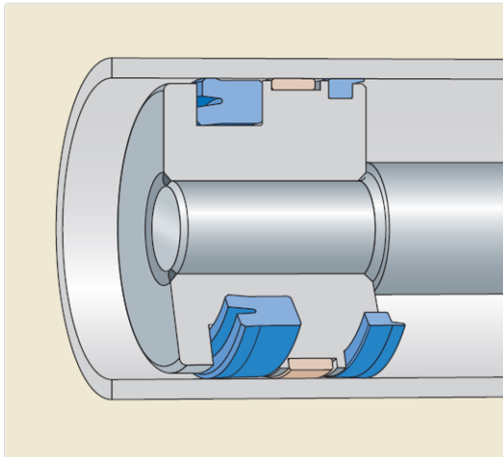


Figura 3.1 Sello de pistón con sello limpiador

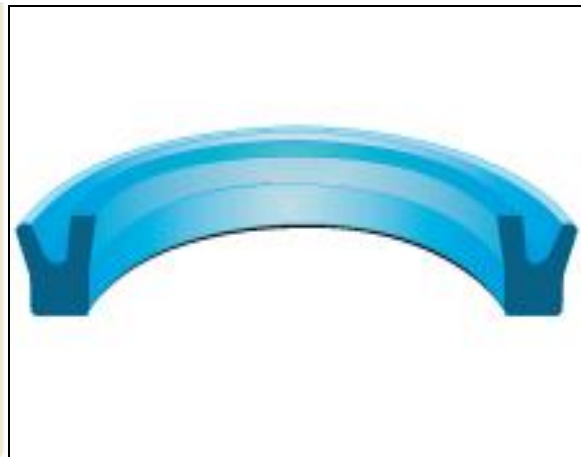


Figura 3.2 Perfil UNP del sello neumático.

3.1.2 Selección de las variables de estrés

En esta prueba, la vida de los sellos es medida bajo diferentes condiciones experimentales. Tres factores o variables de estrés son las que tienen un mayor efecto sobre la vida esperada de los sellos. Las variables de estrés utilizadas para la ALT fueron: la temperatura de la cámara, presión en el cilindro y la velocidad de desplazamiento. Los rangos de trabajo de estas variables en condiciones de uso normal se conocen por anticipado y según su geometría descrita, las condiciones de operación se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Condiciones de operación del sello neumático.

Temperatura	Velocidad máxima	Presión de operación máxima
-30 a 80°C	≤ 1 m/s	174 psi

Para las ALT de los sellos neumáticos, necesariamente deben considerarse las tres variables, ya que son sus modos de fallo más importantes:

La temperatura es una de las causas principales del fallo de un sello de poliuretano, es la temperatura, esta provoca que el sello se endurezca y pierda elasticidad, por lo que se agrieta y se rompe con facilidad.

La velocidad alta axial aumenta la temperatura y ocasiona el endurecimiento de la superficie dinámica causado por rajaduras.

La presión es la principal causa de fallo de un sello. La alta presión dentro de la camisa provoca daños como rotura de labio exterior, desprendimientos en el lado dinámico. La presión extrema ocasiona la extrusión del material y los picos frecuentes de alta presión provocan grietas en el sello.

3.1.3 Determinación de los niveles de prueba

Para determinar los niveles de prueba, se toma como referencia la especificación GMW8287 de la compañía General Motors. Este estándar denominado Prueba de Vida Acelerada Calibrada (CALT, por sus siglas en inglés The Calibrated Accelerated Life Testing) es una metodología propuesta por Larry Edson que aprovecha el trabajo previo de Wayne Nelson, William Meeker, y Pantelis Vassiliou. Esta es especialmente adecuada para situaciones donde se requiere un alto nivel de confiabilidad (General Motors, 2011).

Siguiendo la especificación técnica se obtiene el nivel más alto de estrés a aproximadamente un 10% menor a un límite exagerado, el nivel medio se obtiene con una reducción del 10% del límite más alto y para obtener el nivel más bajo se deberá balancear dos condiciones: Generar el nivel de estrés más bajo, que sea lo más cercano posible al nivel de estrés normal para minimizar el riesgo en la extrapolación y que sea lo más alto posible para reducir el tiempo de prueba y cumplir con los requisitos del calendario programado.

Tabla 3.2 Niveles por variable de estrés.

VARIABLES DE ESTRÉS	X_0	X_L	X_M	X_H
Temperatura	80	140	153	170
Velocidad	1	2.4	3.7	4.95
Presión	90	145	157	175

Las variables de estrés fueron probadas a tres niveles. La Tabla 3.2 se muestra el nivel de operación X_0 , el nivel bajo X_L , el nivel medio X_M y el nivel alto X_H de cada variable de estrés utilizada en la prueba.

3.1.4 Determinación del número de unidades de prueba

Se utilizó un diseño de experimentos factorial completo para la prueba, por lo que fue necesario utilizar 27 especímenes para prueba, (3x3x3) combinaciones de estrés. El uso del diseño de experimentos en las pruebas de vida acelerada son una práctica que ha sido utilizada de manera exitosa en los últimos años. Autores como Mashhadi (1992), MoKinney (1993), Case (1998) y Monroe (2013) consideran que el uso combinado de estos métodos es muy ventajoso e incrementa la eficiencia de la prueba.

3.2 Construcción del banco de pruebas

El banco de pruebas fue construido por Ingenieros Electromecánicos que trabajan para la compañía, para ello se utilizó un cilindro neumático en el cual se instaló el sello de poliuretano.. La temperatura del cilindro fue controlada a través de una resistencia regulada manualmente, la velocidad de desplazamiento fue necesario el uso de tres motores de 2750 RPM, 2500 RMP y 1700 RPM, además se utilizó un compresor cuya presión fue controlada mediante un regulador de flujo.

3.3 Recolección de datos

Para el estudio, las corridas se realizaron de manera aleatoria y se consideró la pérdida de presión del cilindro como fallo del sello. Cabe señalar que dentro del cilindro, la distancia recorrida del sello en un tiempo t se incrementa a medida que se incrementan las revoluciones del motor, por ejemplo, la distancia recorrida del sello en una hora hasta el fallo, es grande en velocidades altas y pequeña en velocidades bajas, por ello los tiempos de fallo fueron transformados a kilómetros. El registro de los tiempos y su transformación se muestra en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Datos obtenidos durante las corridas.

Orden	Temperatura	Presión	Velocidad	Tiempos hasta el fallo (segundos)	Recorrido del sello (kilómetros)
1	140	145	2.4	21528	29.09
2	140	145	3.7	17231	33.74
3	140	145	4.95	17713	52.03
4	140	157	2.4	20163	27.25
5	140	157	3.7	17602	34.47
6	140	157	4.95	14940	43.89
7	140	175	2.4	16205	21.90
8	140	175	3.7	10502	20.57
9	140	175	4.95	11415	33.53
10	153	145	2.4	7562	10.22
11	153	145	3.7	7958	15.58
12	153	145	4.95	8460	24.85
13	153	157	2.4	5224	7.06
14	153	157	3.7	4233	8.29
15	153	157	4.95	6079	17.86
16	153	175	2.4	3319	4.48
17	153	175	3.7	3524	6.90
18	153	175	4.95	1979	5.81
19	170	145	2.4	2111	2.85
20	170	145	3.7	916	1.79
21	170	145	4.95	580	1.70
22	170	157	2.4	1876	2.53
23	170	157	3.7	742	1.45
24	170	157	4.95	546	1.60
25	170	175	2.4	1619	2.19
26	170	175	3.7	779	1.53
27	170	175	4.95	782	2.30

3.4 Selección de la distribución de vida

Después de la recolección de los datos, el siguiente paso en la realización de un análisis de datos de vida acelerada es elegir una distribución vida apropiado. Para ello se realiza una prueba de bondad y ajuste en la que la distribución de vida más adecuada para modelar en conjunto de datos recolectados en la prueba. En la Tabla 3.4 se muestra el resultado de la prueba, en la que la distribución de vida a la que se ajusta a los datos obtenidos es la distribución lognormal.

Tabla 3.4 Resultado de la prueba de bondad y ajuste

	A	B
1	Current Results:	
2		
3	Distribution	Ranking
4	Weibull	2
5	Exponential	3
6	Lognormal	1
7		
8	Weibull	
9	Beta	3.758635
10	Alpha(0)	17.90321
11	Alpha(1)	-0.08594
12	Alpha(2)	-0.01857
13	Alpha(3)	0.158153
14	LK Value	-63.5611
15		
16		
17	Exponential	
18	Alpha(0)	18.66148
19	Alpha(1)	-0.09176
20	Alpha(2)	-0.01746
21	Alpha(3)	0.119549
22	LK Value	-85.4581
23		
24		
25	Lognormal	
26	Log-Std	0.288754
27	Alpha(0)	18.85042
28	Alpha(1)	-0.09362
29	Alpha(2)	-0.01684
30	Alpha(3)	0.108077
31	LK Value	-62.0825

La distribución lognormal tiene ciertas similitudes con la distribución normal. Una variable aleatoria está distribuida log normalmente si el logaritmo de la variable aleatoria se distribuye normalmente (ReliaSoft, 2014).

Matemáticamente la función de densidad de probabilidad (PDF) logarítmica normal se puede obtener, dándose cuenta de que para probabilidades iguales bajo los PDFs normal y lognormal, las áreas incrementales también deben ser iguales, o bien:

$$f(t)dt = f(t')dt'$$

Tomado la derivada, tenemos que

$$dt' = \frac{dt}{t}$$

Entonces

$$f(t) = \frac{f(t')}{t}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s \cdot t} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t' - \mu'}{s} \right)^2} \quad t \geq 0$$

Donde

t' = Logaritmos naturales de los tiempos de fallo.

μ' = Media de los logaritmos naturales de los tiempos de fallo.

s = Desviaciones estándar de los logaritmos naturales de los tiempos de fallo.

El tiempo mediano está dado por

$$t_{med} = e^{\mu'}$$

Por lo tanto

$$\mu' = \ln t_{med}$$

Entonces, si

$$t' = \ln t$$

La PDF se puede representar como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s t} e^{-\frac{1}{2s^2}(t' - \mu')^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s t} e^{-\frac{1}{2s^2}(\ln t - \ln t_{med})^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s t} \exp \left[\frac{1}{2s^2} \left(\ln \frac{t}{t_{med}} \right)^2 \right] \quad \text{para } t \geq 0$$

Donde el parámetro s es un parámetro de forma y t_{med} el parámetro de localización es el tiempo mediano del fallo.

El tiempo medio hasta el fallo (MTTF) está dado por

$$MTTF = t_{med} \exp(s^2/2)$$

Debido a que el logaritmo es una función monótonamente creciente,

$$F(t) = Pr\{T \leq t\} = \Phi\left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}}\right)$$

Entonces

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}}\right)$$

3.5 Selección del modelo de relación vida-esfuerzo

Debido a que la prueba consiste en múltiples estreses de aceleración como es el caso de los sellos neumáticos, es necesaria una relación multivariable general, por ello se eligió el modelo de relación vida-esfuerzo Log-Lineal General (GLL). Tal relación es la relación log-lineal general, describe una característica de vida como una función de un vector de n estreses o $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Matemáticamente la relación viene dada por:

$$L(X) = e^{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}$$

Donde: α_0 y α_j son los parámetros del modelo y X es un vector de n estreses.

La PDF del modelo GLL-lognormal puede ser derivada asignando a la función de densidad de probabilidad de la distribución lognormal, $t_{med} = L(X)$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} st} \exp\left[-\frac{1}{2s^2} \left(\ln \frac{t}{e^{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}}\right)^2\right] \quad t \geq 0$$

3.6 Estimación de parámetros

El método de estimación de máxima verosimilitud se utilizó para determinar los parámetros para la relación GLL-lognormal. Para cada distribución, la función de probabilidad se puede derivar, y los parámetros de modelo (los parámetros de distribución y los parámetros GLL) pueden obtenerse mediante la maximización de la función de probabilidad logarítmica.

Los parámetros obtenidos para la distribución de vida subyacente se muestran en la Tabla 3.5, los cuales fueron obtenidos a través del método de estimación de máxima verosimilitud.

Tabla 3.5 Parámetros estimados en ALTA.

Model:	General Log-Linear
Distribution:	Lognormal
Analysis:	MLE
Log-Std	0.288754
Alpha(0) (Km)	18.850419
Alpha(1)	-0.093618
Alpha(2)	-0.01684
Alpha(3)	0.108077
Mean (Km)	9.953474
LK Value	-62.082491
Fail \ Susp	27 \ 0

Obtenidos los parámetros, en la Figura 3.3 se puede observar la PDF del modelo.

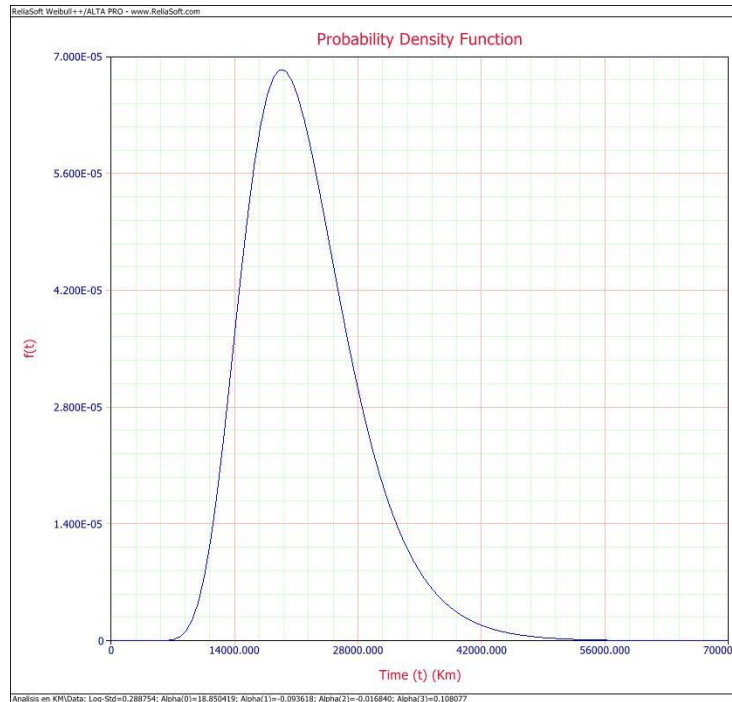


Figura 3.3 Distribución subyacente de los datos

3.7 Caracterización

Una vez obtenidos los parámetros $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se tiene que

$$L(X) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} = e^{18.850419 - 0.0936618x_1 - 0.016840x_2 + 0.108077x_3}$$

Donde x_1, x_2, x_3 representan las variables de estrés: temperatura, presión y velocidad respectivamente, así para las condiciones de uso normal $x_1 = 80, x_2 = 90$ y $x_3 = 1$

$$L(X) = e^{18.850419 - 0.0936618(80) - 0.016840(90) + 0.108077(1)} = 21,025.13$$

Con los parámetros obtenidos (ver Tabla 4) y a partir de la ecuación 2.69 podemos calcular el tiempo medio de fallo de los sellos

$$MTTF = t_{med} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) = (21,025)e^{\frac{(0.288754)^2}{2}} = 21,920 \text{ km.}$$

Tabla 3.6 MTTF calculado por ALTA.

Quick Results Report	
Report Type	ALTA QCP
User Info	
Name:	Iván de Jesús García Garrobo
Company:	Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Date:	11/20/2015
User Input	
Temperature =	80
Pressure =	90
Speed =	1
ALTA Output	
Mean Life =	21920.196719 Km

Entonces de la ecuación 2.73 tenemos que con $t = 21,920$ la confiabilidad es

$$R(21920) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{L(x)}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{0.288754} \ln \frac{21920}{21025}\right) = 0.44$$

Tabla 3.7 Confiabilidad a $t=21920$ calculado en ALTA.

Quick Results Report	
Report Type	ALTA QCP
User Info	
Name:	Iván de Jesús García Garrobo
Company:	Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Date:	11/20/2015
User Input	
Temperature =	80
Pressure =	90
Speed =	1
Mission End Time (Km) =	21920
ALTA Output	
R(t=21920) =	0.442614

Para calcular los percentiles, de la ecuación 2.25, tenemos que

$$F(t_p) = \Phi\left(\frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}}\right)$$

$$Z_{1-R} = \frac{1}{s} \ln \frac{t}{t_{med}}$$

...

$$t = t_{med} e^{s(Z_p)}$$

Para el percentil 10 (p=0.1003),

$$t = 21025.13 e^{.288754(Z_{.1003})} = 14,528.42 \text{ km.}$$

En la Tabla 3.8, se muestra el resultado de ALTA. Cabe señalar que la diferencia en el resultado es debido que, por limitaciones de la tabla acumulada de Z, el cálculo se realizó a un 10.03%.

Tabla 3.8 Percentil 10 calculado en ALTA.

Quick Results Report	
Report Type	ALTA QCP
User Info	
Name:	Iván de Jesús García Garrobo
Company:	Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Date:	11/20/2015
User Input	
Temperature =	80
Pressure =	90
Speed =	1
BX% Life At =	10
Confidence Bounds Used:	2-Sided
Confidence Bounds Method:	Fisher Matrix
Confidence Level =	0.95
ALTA Output	
Upper Bound (0.975) =	37634.46074
B10% Life =	14522.018374 Km
Lower Bound (0.025) =	5603.614706

Los percentiles 1, 10, 50, 90 y 95 se muestran en la tabla 3.9.

Tabla 3.9 Percentiles obtenidos en ALTA.

Quick Results Report	
Report Type	ALTA QCP
User Info	
Name:	Iván de Jesús García Garrobo
Company:	Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Date:	11/20/2015
User Input	
Temperature =	80
Pressure =	90
Speed =	1
BX% Life At =	1,5,50,75,90,95,99
ALTA Output	
B1% Life =	10740.020422 Km
B10% Life =	14522.018374 Km
B50% Life =	21025.143418 Km
B90% Life =	30440.441844 Km
B95% Life =	33807.306157 Km

Capítulo 4

4. Resultados

La compañía esperaba que la vida útil máxima de sello neumático estuviera entre los 15,000 kilómetros. La prueba muestra que el tiempo medio hasta el fallo (MTTF) de los sellos neumáticos de pistón es de 21,920 kilómetros. El resultado superó las expectativas de vida, lo que implica que el producto que se encuentra aún en la fase de prueba es confiable y de buena calidad, por lo que se encuentra listo para lanzarlo al mercado.

Tabla 4.1. Tiempo medio hasta el fallo

ALTA Output	
Upper Bound (0.95) =	48536.30583
Mean Life =	21920.196719 Km
Lower Bound (0.05) =	9899.703243

Se estima que el 10 por ciento de los sellos fallan a los 14,522 kilómetros de recorrido con un intervalo de confianza que se muestra en la Tabla 4.2. Con esta información la empresa puede establecer políticas de garantía que permitan generar la confianza y aceptación, así como también establecer condiciones que ayudarán en el lanzamiento del producto, por lo que con ello se resuelve uno de los principales problemas en el lanzamiento de este nuevo producto.

Tabla 4.2. Estimación del tiempo de fallo del 10 por ciento de los sellos

ALTA Output	
Upper Bound (0.95) =	32292.04785
B10% Life =	14522.018374 Km
Lower Bound (0.05) =	6530.679585

Los resultados de la prueba permitieron conocer el efecto que cada variable de estrés tiene sobre los sellos neumáticos. En la Figura 4.1, Figura 4.2 y Figura 4.3 se muestra los efectos de la temperatura, la presión y la velocidad y la tensión sobre la vida del sello neumático. Al evaluar la variable temperatura, se observa que a media que se incrementa la temperatura en la cámara del cilindro, la vida del sello disminuye considerablemente, lo que indica que la variable tiene un gran efecto sobre la vida del sello. El mismo comportamiento tiene la variable presión, sin embargo, el efecto sobre la vida del sello es menor. Por otro lado, podemos observar que la velocidad de carrera del sello dentro del cilindro tiene un efecto positivo en la vida del producto, esto se explica debido que, a mayor velocidad, la fricción que se genera entre el sello y la camisa del cilindro es menor.

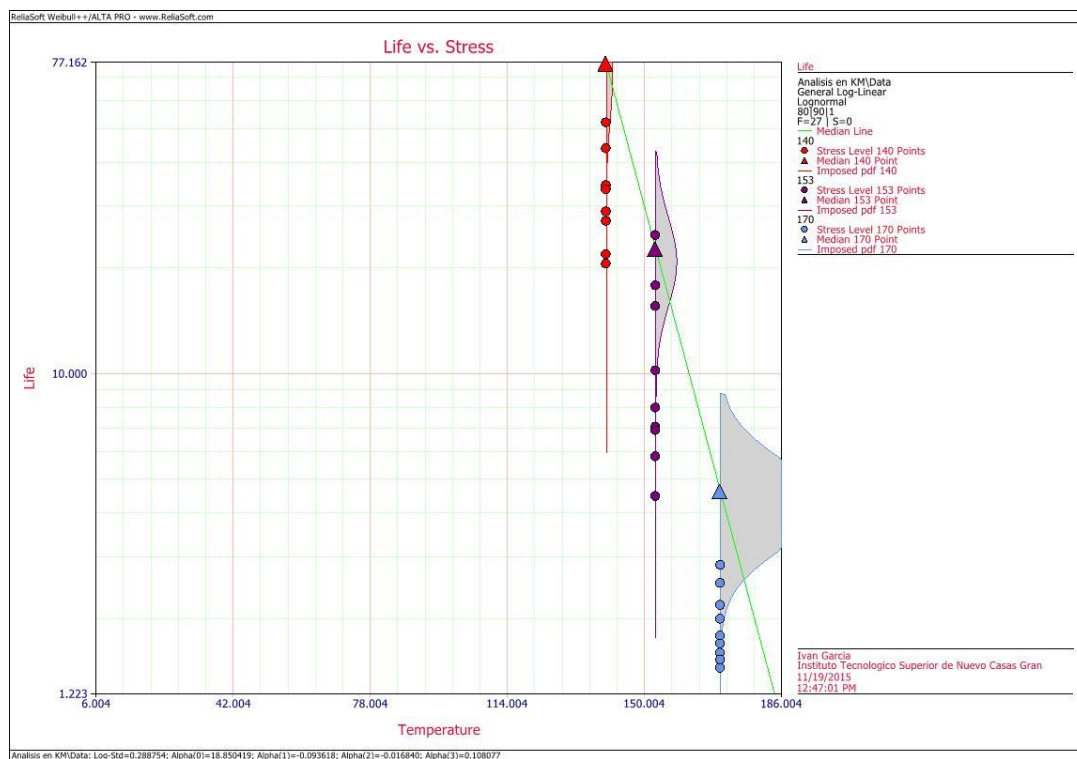


Figura 4.1 Efecto de la temperatura sobre la vida del sello neumático.

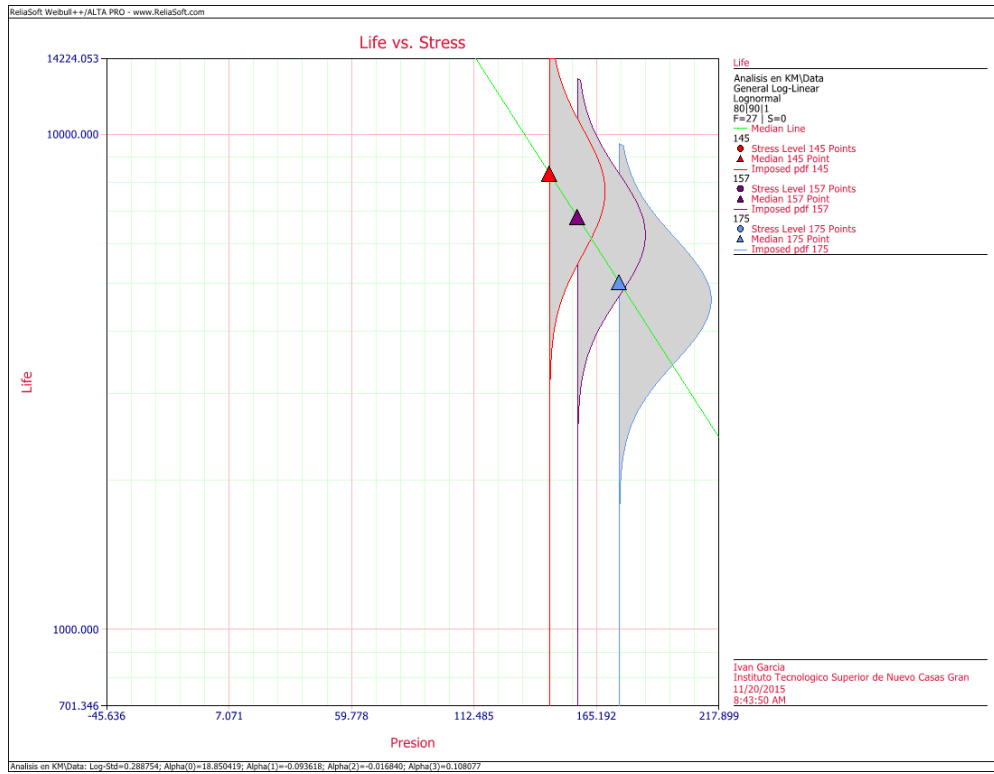


Figura 4.2 Efecto de la presión sobre la vida del sello neumático.

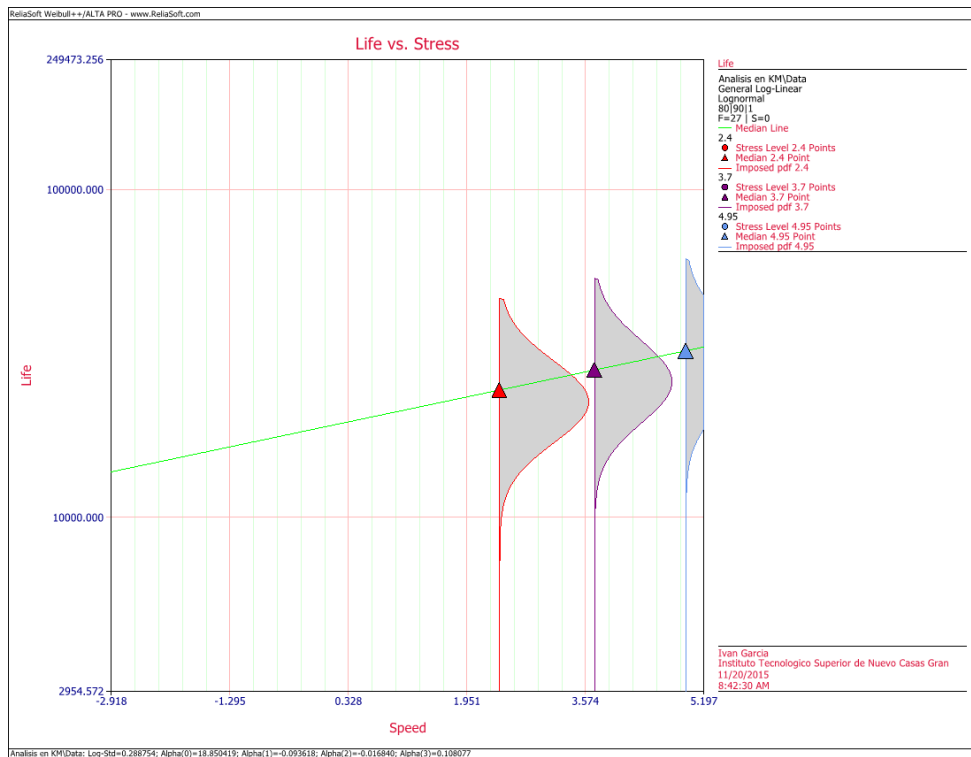


Figura 4.3 Efecto de la velocidad sobre la vida del sello neumático.

Con la función de confiabilidad obtenida, se pudo estimar la confiabilidad de los sellos a un tiempo t . La tabla 4.3 muestra los resultados de las estimaciones de la confiabilidad de los sellos neumáticos, donde t representa los kilómetros a recorrer.

Tabla 4.3 Estimación de la confiabilidad de los sellos neumáticos

Quick Results Report	
Report Type	ALTA QCP
User Input	
Temperature =	80
Pressure =	90
Speed =	1
Mission End Time (Km) =	6000-35000
ALTA Output	
R(t=6000) =	0.999993
R(t=8000) =	0.999591
R(t=10000) =	0.994968
R(t=11000) =	0.987568
R(t=12000) =	0.973942
R(t=13000) =	0.952042
R(t=14000) =	0.920484
R(t=15000) =	0.878879
R(t=16000) =	0.827898
R(t=17000) =	0.769117
R(t=18000) =	0.704709
R(t=19000) =	0.637112
R(t=20000) =	0.568718
R(t=21000) =	0.501653
R(t=22000) =	0.437637
R(t=23000) =	0.377936
R(t=24000) =	0.32337
R(t=25000) =	0.274363
R(t=26000) =	0.231019
R(t=27000) =	0.193191
R(t=28000) =	0.160564
R(t=29000) =	0.13271
R(t=30000) =	0.109147
R(t=31000) =	0.089372
R(t=32000) =	0.072892
R(t=33000) =	0.059244

El comportamiento de la confiabilidad respecto a los kilómetros de recorrido del sello dentro del cilindro neumático se muestra en la Figura 4.4.

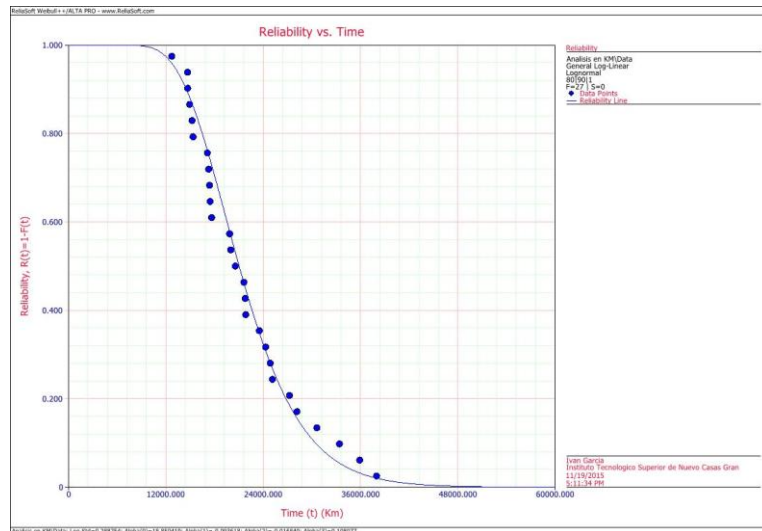


Figura 4.4 Confiabilidad de los sellos a través del tiempo.

Con los resultados de la prueba también es posible estimar la probabilidad de fallo de los del sello neumático a través de los kilómetros de recorrido, esto se muestra gráficamente en la Figura 4.5.

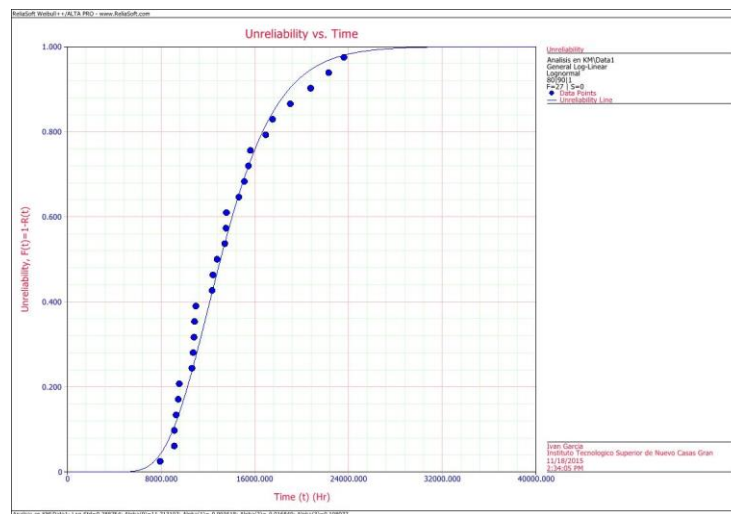


Figura 4.5 Probabilidad de fallo de los sellos a través del tiempo

Capítulo 5

5. Conclusiones y recomendaciones

Los objetivos planteados en esta investigación se cumplieron. Una vez que se determinaron los parámetros de modelo, se pudo obtener las características de los sellos, de esta manera se pudo calcular el $MTTF$, $B1$, $B10$, $B50$, $B90$, $B95$, $R(t)$, $F(t)$ y $\lambda(t)$. Gracias al estudio realizado, la compañía cuenta con datos confiables con los que podrá establecer las políticas de garantía que mejor considere. Fue muy importante para la empresa que los resultados superaran las expectativas de vida, lo que implica que el producto que se encuentra aún en la fase de prueba es confiable y de buena calidad, por lo que se encuentra listo para lanzarlo al mercado.

El factor de aceleración de esta prueba en el nivel bajo fue de 597, esto significa que la prueba fue realizada bajo condiciones de estrés muy altas, por lo que es recomendable replicar la prueba a niveles más bajos, con esto reducir los intervalos de confianza.

Por otro lado, es de suma importancia considerar que el banco de pruebas tiene que ser capaz de alcanzar los niveles de estrés en los que se desean probar las unidades experimentales y además de permitir más de una condición de estrés. La confiabilidad de las inferencias estará delimitada por la calidad y versatilidad del equipo de prueba, y aunque en esta investigación no se evaluó la incertidumbre concerniente a la capacidad del equipo de prueba, es recomendable asegurarse de que el banco de pruebas a utilizar sea confiable.

En esta investigación, la variación concerniente a la calibración del sistema de medición se considera como incertidumbre propia del proceso, sin embargo, para el equipo de medición es recomendable que se asegure que cuente con la resolución adecuada a la variable que se pretende medir.

Referencias

- Balakrishnan, N. (2010). *Advances in Degradation Modeling*. New York, NY: Advisory Board. <http://doi.org/10.1007/978-0-8176-4924-1> e-ISBN
- Bertsche, B. (2008). *Reliability in Automotive and Mechanical Engineering*. Berlin, Germany: Springer. <http://doi.org/10.1007/978-3-540-34282-3>
- Birolini, A. (2010). *Reliability Engineering* (7a Ed.). Tuscany, Italy: Springer. <http://doi.org/10.1007/978-3-642-14952-8>
- Case, K. E. (1998). Using Design of Experiments for Accelerated Reliability Testing, (May).
- Dhillon, B. S. (2005). *Reliability, Quality, and Safety for Engineers*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Dummer, G. W. ., Tooley, M. H., & R.C.Winton. (1997). *An elementary guide to Reliability* (5a Ed.). London, England: Butterworth-Heinemann.
- Ebeling, C. E. (2010). *An Introduction to Reliability and Maintainability engineering* (2a ed.). Canada: Waveland Press Inc.
- Elsayed, E. a., & Zhang, H. (2007). Design of PH-based accelerated life testing plans under multiple-stress-type. *Reliability Engineering and System Safety*, 92(3), 286–292. <http://doi.org/10.1016/j.res.2006.04.016>
- General Motors, C. Calibrated Accelerated Life Testing (CALT), Pub. L. No. Test Procedure GMW8758 (2011).
- International Organization for Standardization. (2008). ISO 20815:2008. Retrieved from www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:20815:en
- Kleinbaum, D. G. (2005). *Statistics for Biology and Health. Public Health* (2a Ed., Vol. 36). New York, NY: Springer. <http://doi.org/10.1016/B978-0-12-387667-6.00013-0>
- Levin, M. a., & Kalal, T. T. (2003). *IMPROVING PRODUCT RELIABILITY Strategies and Implementation* (1a Ed.). John Wiley & Sons, Inc. <http://doi.org/10.1002/0470014024>
- Lewis, E. E. (1994). *Introduction to Reliability Engineering* (2a Ed.). Euanston, Illinois: John Wiley & Sons, Inc.

- Marcelino, J. L. (2014). *Survival analysis as a tool to model Little Bustard mortality rates in the Iberian Peninsula*. Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa.
- Mashhadi, M. H. (1992). *On the Application of Design of Experiments to Accelerated Life Testing On the Application of Design of Experiments to Accelerated Life Testing*.
- Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data* (3a Ed.). New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.
- MoKinney, B. T. (1993). ACCELERATED RELIABILITY TESTING UTILIZING DESIGN OF EXPERIMENTS. *Security*, (December).
- Monroe, E. M. (2013). OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGNS FOR ACCELERATED LIFE TESTS WITH CENSORING AND CONSTRAINTS. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(May), 1689–1699. <http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Nelson, W. (2009). *ACCELERATED TESTING Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- ReliaSoft. (2014). *Life Data Analysis Reference*. Tucson, Anizona: ReliaSoft Corporation. Retrieved from <http://www.weibull.com/>
- Saunders, S. C. (2007). *Reliability, Life Resting, and Prediction of Service Lives*. Kirkland, Washington: Springer. <http://doi.org/10.1007/978-0-387-98135-2>
- The Association of German Engineers (VDI). (2006). VDI 4001 Reliability Terminology. Retrieved from <http://www.vdi.eu/engineering/vdi-standards>
- Web Mexican Business. (2013). México repunta en Automatización Industrial. Retrieved from <http://www.mexicanbusinessweb.mx/negocios-rentables-en-mexico/mexico-repunta-en-automatizacion-industrial/>