

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y MANUFACTURA**

**DOCTORADO EN TECNOLOGÍA**



**Metodología para determinar la resistencia mínima de diseño en el límite inferior de un rodamiento de bola sujeto a fatiga con una confiabilidad de diseño del 90%**

Tesis que presenta

**M.I.I. Osvaldo Monclova Quintana**

Becado por el Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías

Como requisito parcial para obtener el grado de:

**Doctor en Tecnología**

Director de Tesis: **Dr. Manuel Román Piña Monarrez**

Codirector: **Dr. Rey David Molina Arredondo**

## DEDICATORIA

A mis padres, por su amor incondicional y por ser mi refugio y mi guía a lo largo de esta vida.

A mi hermana, cuya presencia constante me ha sostenido en los momentos más difíciles.

A Dios, por darme la fortaleza para seguir adelante, especialmente en este último año y medio en el que aprendí a sostenerme con fe y esperanza. A mis amigos, por acompañarme en cada paso del camino.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento al Dr. Manuel Román Piña Monarrez, mi director de tesis, por todas sus enseñanzas, por su paciencia y por su acompañamiento comprometido durante cada etapa de esta investigación. Su guía académica ha sido fundamental para la culminación de este trabajo.

Gracias infinitas a mis Padres, por su amor incondicional, por su apoyo moral y por ser siempre mi sustento en los momentos más difíciles.

A mis amigos y compañeros, gracias por su presencia, por las conversaciones, los abrazos, las risas compartidas y por acompañarme tanto en los días de estrés como en los de alegría. Esta etapa no hubiera sido igual sin ustedes.

Agradezco profundamente a la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez por brindarme el espacio académico y formativo que hizo posible este proyecto, así como al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por el apoyo económico otorgado a lo largo de mis estudios de doctorado. Sin su respaldo, este esfuerzo no habría sido posible.

## RESUMEN

El buen desempeño de los elementos mecánicos depende de la confiabilidad de sus componentes. Los rodamientos de bolas son elementos críticos en aplicaciones que requieren una alta seguridad como la industria automotriz y aeroespacial. No obstante, al estar sometidos a cargas cíclicas, estos presentan fatiga. Fenómeno que provoca la pérdida de resistencia generando así la falla.

Los modelos establecidos en las normas internacionales constituyen la base para estimar la vida de los rodamientos, pero se centran en valores nominales por lo que no consideran la dispersión estadística ni los percentiles de falla. Esto puede derivar en diseños sobreestimados, especialmente en sistemas donde el margen de seguridad es crítico.

La presente investigación desarrolla una metodología para determinar la resistencia mínima de diseño en el límite inferior de un rodamiento de bola sujeto a fatiga, con una confiabilidad del 90 %. En el caso del estudio aplicado a un reductor de velocidad con rodamiento SKF 6009, los cálculos iniciales mostraron una confiabilidad real de 0.8289 (Villa Covarrubias, 2021), la cual es menor al 0.9 requerido. Al aplicar la metodología propuesta, se obtuvo un valor nominal de  $\eta = 910 \text{ MPa}$  con un parámetro de forma  $\beta = 1.28$ . A partir de estos datos se utilizó la matriz de Fisher para calcular la desviación estándar  $\sigma_\eta$  para poder establecer los límites de confianza superiores e inferiores de  $\eta$  considerando  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ . Lo más importante es que, al aplicar la metodología, se demostró que en el límite inferior de diseño para  $\eta_L$  el rodamiento cumple con una confiabilidad de 0.9, garantizando así el nivel requerido.

Las aportaciones de este trabajo consisten en una metodología que define la resistencia mínima de diseño con base en percentiles, ofreciendo un criterio más realista que los métodos tradicionales. Además, brinda una herramienta práctica para mejorar la seguridad, reducir fallas prematuras y extender la durabilidad operativa de los sistemas mecánicos sometidos a fatiga.

# CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1. Antecedentes de la Investigación.....	7
1.2. Planteamiento del Problema .....	9
1.3. Objetivos.....	10
1.3.1. Objetivo general.....	11
1.3.2. Objetivos específicos .....	11
1.4. Hipótesis .....	11
1.4.1. Hipótesis General.....	11
1.4.2. Hipótesis Específicas .....	11
1.5. Justificación .....	12
1.6. Alcances y Limitaciones del Proyecto.....	13
2. MARCO TEÓRICO .....	14
2.1. Fundamentos de los Rodamientos .....	14
2.1.1. Clasificación .....	15
2.1.2. Rodamientos de bolas .....	16
2.1.3. Modos de falla en los rodamientos .....	16
2.2. Fatiga .....	17
2.2.1. Máquina de prueba para fatiga.....	18
2.2.2. Diagrama S-N o de Wöhler .....	18
2.2.3. Fatiga de bajo ciclaje .....	20
2.2.4. Fatiga de alto ciclaje .....	20
2.2.5. Límite de resistencia a la fatiga $S'e$ y $Se$ .....	21
2.3 Teoría de Hertz .....	23
2.3.1. Principios del contacto elástico.....	24
2.4. Análisis de Confiabilidad .....	24
2.4.1 Distribución Weibull .....	25
2.4.2 Análisis Estrés-Resistencia Weibull .....	28
3. METODOLOGÍA.....	32
4. RESULTADOS .....	44
5. CONCLUSIONES.....	55
6. REFERENCIAS .....	56

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Componentes de un rodamiento de bolas.....	14
Figura 2. Máquina de prueba R.R. Moore. Tomado de “Diseño de Elementos de Máquinas” (p. 210), por L. S. Venegas, 2011, McGraw-Hill Interamericana.....	18
Figura 3. Probeta estandarizada para máquina R.R. Moore. Adaptado de Tomado de “Diseño de Elementos de Máquinas” (p. 210), por L. S. Venegas, 2011, McGraw-Hill Interamericana. ....	18
Figura 4. Diagrama S-N o diagrama de Wöhler .....	19
Figura 5. Función de probabilidad de la distribución Weibull para diferentes valores de beta.....	27
Figura 6. Orientación de la elipse de contacto en función de la razón de radio. ....	36
Figura 7. Rodamiento SKF 71909 ACEGA/HCP4A.....	54

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ecuaciones elípticas asociadas a la razón de curvatura.....	36
Tabla 2. Valores de rangos medianos $Y_i$ . ....	51
Tabla 3. Predicción de tiempos a la falla. ....	51
Tabla 4. Estimación de los límites superior e inferior de $\eta$ y confiabilidad según percentiles. ....	53
Tabla 5. Especificaciones del rodamiento SKF 71909 ACEGA/HCP4A .....	54

# 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se exponen los antecedentes del proyecto, así como el planteamiento del problema, objetivos e hipótesis, los que anteceden a la justificación y termina con los alcances y delimitación.

## 1.1. Antecedentes de la Investigación

En la práctica, los rodamientos son componentes fundamentales en los sistemas mecánicos, que se encargan de reducir la fricción facilitando el movimiento. Su correcta selección, así como su diseño son cruciales para optimizar la durabilidad y su eficiencia, lo que repercute directamente en la confiabilidad general del sistema mecánico (Schmid et al., 2014)(T. A. ; K. M. N. Harris, 2007).

Dentro de los modos de falla en estos componentes, la fatiga se destaca como uno de los más críticos, ya que es un fenómeno que ocurre por la aplicación cíclica de esfuerzos, lo cual produce la iniciación y propagación de grietas hasta que el elemento falla (Suresh, 1998). En rodamientos, este tipo de fatiga de contacto representa uno de los principales mecanismos de pérdida de resistencia, generado por la aplicación repetida de esfuerzos (Zaretsky, 2016).

La durabilidad de los rodamientos se especifica convencionalmente a partir del parámetro  $L_{10}$ , y representa el tiempo en el que el 90 % de una población de rodamientos permanece en funcionamiento, lo que establece un nivel de confiabilidad estándar en diseño de rodamientos (SKF, 2024). Tanto la normativa ISO 281 como los estándares ABMA/ANSI establecen métodos para calcular la capacidad de carga dinámica básica, y la vida nominal a diferentes niveles de confiabilidad, incluyendo el índice estándar de 90 % (ANSI/ABMA, 1990).

La necesidad de calcular la resistencia mínima de diseño es de especial importancia cuando se busca garantizar que incluso en las condiciones adversas se cumplen con la confiabilidad deseada. Desafortunadamente, en entornos dinámicos cumplir con esta confiabilidad a través del

uso de los parámetros Weibull estimados no es posible ya que estos representan el valor medio o nominal de dichos parámetros. Así, para cumplir con la confiabilidad deseada, es esencial considerar también la variabilidad estadística de los parámetros y calcular sus percentiles inferiores para asegurar un margen de seguridad robusto.

En este contexto, la literatura actual ofrece metodologías basadas en análisis de confiabilidad y fatiga aplicado a rodamientos. Por ejemplo, se han desarrollado métodos utilizando modelos combinados con análisis de elemento finito (FEM), para analizar de manera eficiente la respuesta mecánica y la confiabilidad del desgaste en rodamientos de bolas mediante un enfoque robusto ante la incertidumbre de parámetros de diseño (Abdullah et al., 2020). Otros estudios han propuesto métodos basados en el análisis Weibull y metodología de confiabilidad para estimar la fiabilidad efectiva de rodamientos en condiciones reales de uso, especialmente considerando un nivel de confiabilidad del 90 % (Castillo & Canteli, 2009), pero no consideraron en sus análisis la variación de los parámetros Weibull.

Además, se han aplicado métodos de diseño probabilístico y de optimización que se basan en análisis de confiabilidad para determinar configuraciones de rodamientos que maximizan su robustez frente a incertidumbres en parámetros de carga y material (X. Wang et al., 2022). También en aplicaciones de gran escala, como los rodamientos en aerogeneradores, se han llevado a cabo análisis de confiabilidad utilizando simulación por Monte Carlo y evaluaciones de probabilidad de falla bajo condiciones límite, considerando variaciones dimensionales y turbulencias, lo que resalta la necesidad de análisis estadísticos completos en ambientes realistas (Zhao et al., 2023) (Hart et al., 2020).

En resumen, aunque existen enfoques consolidados para la evaluación de la vida nominal mediante el parámetro  $L_{10}$  y métodos basados en la distribución Weibull u otros modelos

probabilísticos, persisten limitaciones en su capacidad para capturar la variabilidad estadística en los límites inferiores del comportamiento y brindar una resistencia de diseño mínima con un nivel de confiabilidad especificado del 90 %. Esto es relevante cuando se precisa garantizar el rendimiento aún bajo los escenarios más desfavorables.

Por ello, esta investigación propone una metodología que estima la resistencia mínima de diseño de un rodamiento de bola sometido a fatiga, no solo a partir del valor nominal de  $\eta$ , sino también incorporando su dispersión estadística mediante el uso de la matriz de Fisher. Esto permite calcular intervalos de confianza y determinar valores de  $\eta$  para diferentes percentiles (por ejemplo,  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$ ), ajustando así el diseño con una confiabilidad de diseño del 90 % fijada en el límite inferior. En este trabajo se aplicó dicha metodología a un caso de estudio con un rodamiento SKF 6009 en un reductor de velocidad, demostrando que, aunque los cálculos iniciales arrojaron una confiabilidad de 0.8289, al considerar los percentiles inferiores se logró garantizar en el límite inferior la confiabilidad del 90%.

## **1.2. Planteamiento del Problema**

La fatiga en elementos mecánicos es uno de los modos principales de falla que afectan su confiabilidad. Para el caso particular de los rodamientos de bolas, este fenómeno se manifiesta por la pérdida progresiva de resistencia que se origina por la aplicación cíclica de esfuerzos. Fenómeno que genera la iniciación y propagación de grietas en las zonas donde se da el contacto. Dicho proceso se complica cuando existen entornos donde las condiciones de operación están sujetas a vibración, cargas variables, contaminantes, y factores que aceleran el desgaste del material, reduciendo de forma significativa la vida útil del rodamiento.

Si bien la literatura ofrece una variedad de teorías de falla y modelos para estimar la vida útil, la mayoría son empleados para cargas estáticas o bajo condiciones ideales. En la práctica, los rodamientos trabajan bajo un ambiente de incertidumbre estadística. Esto ha llevado al uso de métodos probabilísticos para su análisis, siendo la distribución Weibull como una de las más utilizadas para caracterizar la vida por fatiga. No obstante, la aplicación actual de estos modelos se concentra principalmente en la estimación de valores promedio de confiabilidad, sin prestar suficiente atención a la pérdida de resistencia en los percentiles inferiores, los cuales representan los escenarios más críticos.

La ausencia de un método generalmente aceptado para determinar de forma eficiente la resistencia mínima de diseño de rodamientos sujetos a fatiga constituye una limitación importante. En entornos de alta criticidad como la industria aeroespacial o automotriz el diseñar únicamente en función de valores promedio puede llevar a subestimaciones de riesgo, generando fallas prematuras con consecuencias de seguridad significativas.

Por ello, resulta necesario desarrollar una metodología que permita determinar la resistencia mínima de diseño de un rodamiento de bola sujeto a fatiga, considerando la variabilidad estadística de sus parámetros y garantizando un nivel de confiabilidad de diseño del 90% en el límite inferior. Con ello se busca proporcionar una metodología que brinde mayor robustez al diseño de componentes mecánicos que son sometidos cargas cíclicas.

### **1.3. Objetivos**

En esta sección se presentan los objetivos del proyecto, iniciando con el objetivo general, mismo que precede a los particulares.

### **1.3.1. Objetivo general**

Determinar la resistencia mínima de diseño de un rodamiento de bola sujeto a fatiga, para que éste presente una confiabilidad mínima de diseño del 90% en el límite inferior de confianza.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Determinar el valor nominal de  $\eta$  que corresponde a una confiabilidad nominal de 90%.
- Determinar la desviación estándar de  $\eta$  a partir de la matriz de Fisher generada por los tiempos a la falla predichos.
- Determinar el valor mínimo de  $\eta$  para el que el límite inferior de confiabilidad es del 90%.
- Desarrollar un método para estimar el valor de  $\eta$  para cualquier percentil deseado, aquí se determina para  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ , y  $3\sigma$ .
- Validar la metodología propuesta mediante el análisis de un caso de estudio.

## **1.4. Hipótesis**

En esta sección se inicia con la hipótesis general, para posteriormente, en el apartado siguiente, presentar las hipótesis específicas.

### **1.4.1. Hipótesis General**

Existe un valor de resistencia mínima para el que el rodamiento de bola presenta una confiabilidad del 90% en su límite inferior de confiabilidad.

### **1.4.2. Hipótesis Específicas**

- El valor nominal de  $\eta$  para el que la confiabilidad es de 90%, puede ser calculado a partir de la distribución Weibull.

- La desviación estándar de  $\eta$  puede obtenerse mediante la matriz de Fisher determinada de los tiempos a la falla predichos.
- Existe un valor mínimo de  $\eta$  para el que el límite inferior de confiabilidad es del 90%.
- Es posible desarrollar un método general para estimar el valor de  $\eta$  para cualquier percentil deseado, aquí se determina para  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ , y  $3\sigma$ .

#### 1.4. Justificación

La fatiga en rodamientos de bolas representa un problema de gran complejidad en el ámbito de la ingeniería mecánica, ya que esta depende de múltiples factores como condiciones de carga, geometría, propiedades del material, calidad de lubricación, temperatura, entre otros. Estos factores interactúan de manera no lineal y aleatoria, lo que genera variabilidad en la resistencia y vida útil de los rodamientos. En este contexto, la pérdida progresiva de resistencia por cargas cíclicas no puede explicarse adecuadamente mediante modelos deterministas ni mediante aproximaciones basadas exclusivamente en valores promedio.

El problema no se encuentra resuelto porque, si bien existen normas internacionales y metodologías basadas en la curva de vida  $L_{10}$  y en la distribución de Weibull, estas se enfocan en la vida nominal. Dicho enfoque no considera de manera suficiente la dispersión estadística de los parámetros ni los percentiles inferiores de resistencia, los cuales son críticos en aplicaciones donde la falla de un rodamiento puede tener consecuencias graves. La falta de un método estandarizado para calcular la resistencia mínima de diseño, incorporando intervalos de confianza, constituye una limitación importante en el diseño actual.

Resolver este problema es de gran relevancia porque los rodamientos son componentes fundamentales en sectores de alta responsabilidad, tales como la industria aeroespacial y

automotriz. Un diseño que no considere los límites inferiores de confiabilidad puede derivar en fallas prematuras, interrupciones de servicio, sobrecostos en mantenimiento y seguridad.

Por consiguiente, la presente investigación propone una metodología que, mediante la aplicación de la distribución Weibull, la determinación de parámetros por medio de la matriz de Fisher y el cálculo de valores de  $\eta$  en diferentes percentiles ( $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ ), permita determinar la resistencia mínima de diseño de un rodamiento de bola sujeto a fatiga, garantizando un nivel de confiabilidad del 90 % en el límite inferior de confiabilidad. De esta manera, se contribuye a proporcionar una herramienta para el diseño mecánico, mejorando la seguridad y confiabilidad en aplicaciones industriales.

## **1.6. Alcances y Limitaciones del Proyecto**

### Alcances

- El análisis de confiabilidad se realiza solo utilizando la distribución Weibull.
- Los parámetros Weibull se determinan solo en base a los esfuerzos principales generados por el rodamiento de bola.
- Solo se determina la resistencia mínima de diseño de un rodamiento de bola sujeto a fatiga, considerando una confiabilidad mínima del 90%.

### Limitaciones

- El estudio se centra solo en el rodamiento de bola.
- La metodología desarrollada solo es aplicable a las condiciones especificadas en el estudio.
- Para el cálculo de los intervalos de confianza no se utiliza Bootstrapping.

## 2. MARCO TEÓRICO

A lo largo de este capítulo se presentan las bases teóricas de la investigación, abordando los rodamientos y sus modos de falla, la fatiga y la teoría de Hertz, seguido de los fundamentos de confiabilidad, con énfasis en la distribución Weibull, máxima verosimilitud y la matriz de Fisher empleada en el cálculo de intervalos de confianza. Estos elementos constituyen el sustento conceptual de la metodología propuesta.

### 2.1. Fundamentos de los Rodamientos

Los rodamientos se consideran elementos mecánicos de soporte y de guía para el movimiento entre dos componentes, cuya principal función es reducir la fricción y facilitar la transmisión de cargas (ver Figura. 1). Estos elevan el rendimiento y prolongan la durabilidad de los sistemas mecánicos. Estos componentes están presentes en casi todos los sectores industriales como el automotriz y el aeroespacial, siendo críticos para el desempeño de equipos de alta responsabilidad operativa (SKF, 2024).

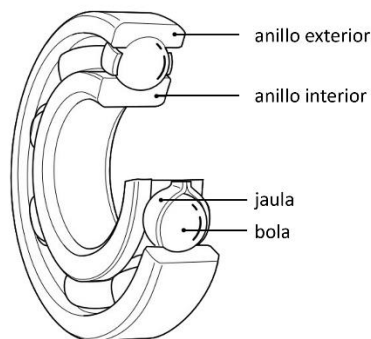


Figura 1. Componentes de un rodamiento de bolas.

Como se muestra en la Figura 1, un rodamiento se encuentra constituido por:

- Aro interno: se ajusta al eje, transmitiendo las cargas desde los elementos rodantes hasta este.
- Aro externo: distribuye la carga hacia la estructura soporte.
- Elementos rodantes: pueden presentarse en forma de bolas o rodillos.
- Jaula o separador: mantiene los elementos que son rodantes uniformemente distribuidos, evitando el contacto directo entre ellos.
- Sistemas de lubricación: esenciales con el fin de disminuir el desgaste y prevenir la entrada de contaminantes.

### **2.1.1. Clasificación**

De acuerdo con la norma ISO 5593 y la American Bearing Manufacturerers Association, los rodamientos pueden clasificarse por (ANSI/ABMA, 1990):

Según la geometría de los elementos rodantes:

- De bolas: adecuados para cargas moderadas y altas velocidades.
- De rodillos cilíndricos: destinados a soportar cargas radiales elevadas.
- De rodillos cónicos: diseñados para resistir cargas combinadas de tipo radial y axial.
- De rodillos esféricos: con capacidad de auto alineación, utilizados en condiciones de desalineación angular.

De acuerdo con la dirección de la carga:

- Radiales: diseñados para resistir cargas perpendiculares al eje.
- Axiales: especializados en cargas paralelas al eje.
- Combinados: capaces de soportar simultáneamente ambas.

Cada categoría responde a requerimientos específicos de carga, velocidad, ambiente operativo y expectativas de vida útil.

### **2.1.2. Rodamientos de bolas**

Los rodamientos de bola se encuentran entre los más empleados ya que se distinguen por su versatilidad. Su diseño favorece una baja fricción, así como bajos niveles de ruido y vibración, lo que los hace adecuados para trabajar a altas velocidades de rotación. Además, pueden soportar cargas tanto radiales como axiales en ambas direcciones, presentan facilidad de montaje y demandan menor mantenimiento en comparación con otras variantes de rodamientos (Hamrock, 1981).

Entre sus tipos se encuentran:

- Rodamientos rígidos de una hilera de bolas: capaces de soportar cargas radiales y axiales moderadas y se emplean en motores eléctricos, bombas y ventiladores.
- Rodamientos de contacto angular: diseñados para resistir cargas axiales elevadas.
- Rodamientos de doble hilera: ofrecen mayor capacidad de carga axial y rigidez.
- Rodamientos de bolas de empuje: son exclusivamente para soportar cargas axiales.

Su relevancia en sectores estratégicos se explica por tres factores:

- Bajo coeficiente de fricción en comparación con los rodamientos de rodillos.
- Alta precisión y rigidez dinámica, lo que reduce vibraciones y ruido.
- Facilidad de estandarización, con disponibilidad global y bajo costo relativo.

### **2.1.3. Modos de falla en los rodamientos**

El desempeño de los rodamientos está limitado por distintos mecanismos de falla, entre los cuales la fatiga de contacto es el más crítico. Este fenómeno se produce debido a las tensiones de contacto

de Hertz que se generan entre las pistas y los componentes rodantes. Dichas tensiones son de carácter cíclico y provocan la nucleación de grietas subsuperficiales, las cuales crecen hasta originar desprendimientos de material en la superficie (Harris, T., 1985).

Otros modos de falla incluyen:

- Fallas por lubricación deficiente: originan desgaste adhesivo y abrasivo, elevando la temperatura y acelerando la fatiga.
- Contaminación por partículas sólidas o humedad: producen corrosión, que actúan como concentradores de tensiones.
- Sobrecargas e impactos: provocan deformaciones plásticas permanentes.
- Malos ajustes en el montaje: generan micro deslizamientos entre el aro y su asiento, con desgaste localizado.
- Inestabilidad térmica: diferencias de dilatación entre aro interno y externo que modifican la precarga y reducen la vida útil.

## **2.2. Fatiga**

La fatiga constituye uno de los mecanismos fundamentales que causan el deterioro de los componentes de máquina y otros tipos de estructuras. Este fenómeno puede provocar fallas incluso cuando los esfuerzos aplicados se mantienen por debajo del límite elástico, debido a la acumulación progresiva de daño generado por cargas cíclicas. Su efecto resulta especialmente relevante en componentes sometidos a cargas repetitivas, manifestándose desde la microescala como en los contactos de un rodamiento hasta la macro escala como en las fracturas estructurales de buques o aeronaves (Zhang et al., 2023).

### 2.2.1. Máquina de prueba para fatiga

La resistencia a la fatiga de los materiales, cuando son sometidos a cargas cíclicas, se mide utilizando el aparato de prueba conocida como R. R. Moore (ver figura 2).

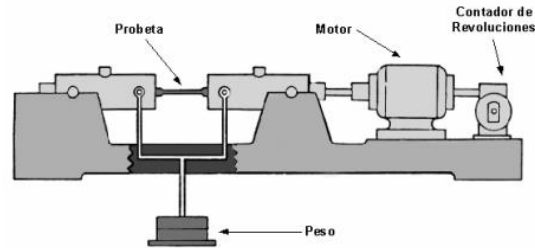


Figura 2. Máquina de prueba R.R. Moore. Tomado de “Diseño de Elementos de Máquinas” (p. 210), por L. S. Venegas, 2011, McGraw-Hill Interamericana.

Esta máquina tiene un contador de revoluciones que son utilizados para saber cuántos ciclos se necesitan hasta que se produce la falla (Meggiolaro et al., 2018). Las probetas que utiliza la máquina de prueba (ver figura 3) están sometidas a flexión pura mediante pesos mientras se gira.

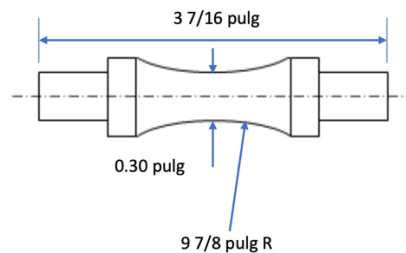


Figura 3. Probeta estandarizada para máquina R.R. Moore. Adaptado de Tomado de “Diseño de Elementos de Máquinas” (p. 210), por L. S. Venegas, 2011, McGraw-Hill Interamericana.

En la figura se puede apreciar un diseño de una probeta estándar que son utilizadas en la máquina de prueba de fatiga.

### 2.2.2. Diagrama S-N o de Wöhler

August Wöhler, ingeniero alemán, logró determinar una relación entre la resistencia a la fatiga y el número de ciclos requeridos para que se produzca la falla de una probeta, utilizando

experimentos de flexión en vigas rotatorias (Schlitz, 1996). Los diagramas de Wöhler, también llamados diagramas S-N, se utilizan para mostrar estas relaciones. En estos diagramas ( $S$ ) representa el esfuerzo y ( $N$ ) el número de ciclos. Además, Wöhler observó que algunos materiales tienen un límite de resistencia a la fatiga definido, mientras que otros no (Lorén & Lundström, 2005). En el diagrama S-N, el eje vertical muestra la resistencia a la fatiga, mientras que en el eje horizontal el número de ciclos de forma logarítmica (ver figura 4). Cuando un material no ha sido expuesto a ciclos de carga, la resistencia inicial a la fatiga es equivalente al máximo esfuerzo que puede soportar  $S_{ut}$ . Sin embargo, al exponerse a cargas repetitivas, esta resistencia disminuye.

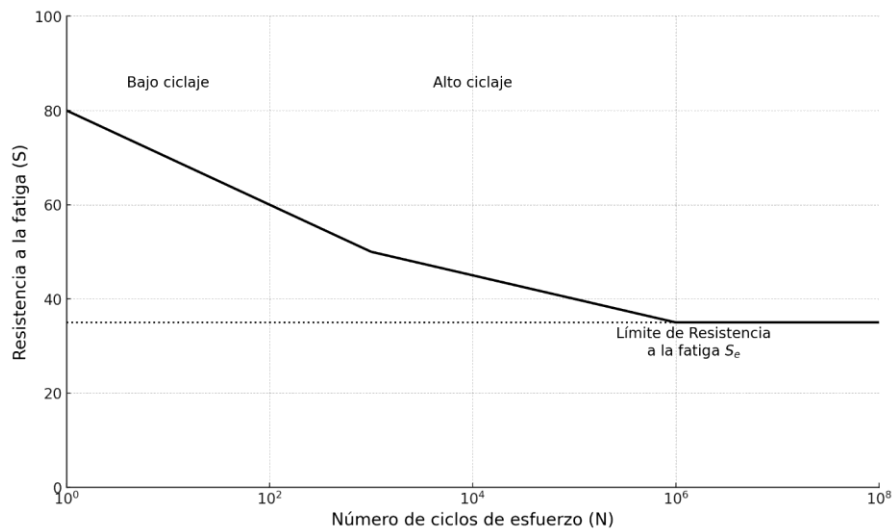


Figura 4. Diagrama S-N o diagrama de Wöhler

En la figura 4, se pueden observar las etapas de la fatiga de bajo ciclaje que abarca desde  $10^0$  a  $10^3$ , el alto ciclaje va desde  $10^3$  a  $10^6$  y vida infinita después de esto. Aunque teóricamente se considera vida infinita, pero en la práctica los materiales pueden fallar. Estos valores son representados mediante el diagrama S-N (M. Wang et al., 2018).

### 2.2.3. Fatiga de bajo ciclaje

La fatiga de bajo ciclaje es un fenómeno crítico en la integridad estructural de componentes mecánicos, especialmente en aquellos sometidos a cargas severas pero pocas veces repetidas. Se caracteriza por la aparición de fallos en el material tras relativamente un número bajo de ciclos de carga, generalmente debajo de 1000 ciclos, con una pendiente de deterioro casi imperceptible en las curvas de fatiga (Harik et al., 2002).

### 2.2.4. Fatiga de alto ciclaje

La fatiga de alto ciclaje empieza a los  $10^3$ , tras la zona de bajo ciclaje en el gráfico S-N. El límite de esta zona cambia según el material y oscila entre  $10^6$  y  $10^7$  ciclos, aunque en la figura 11 se presenta de  $10^3$  a  $10^6$  ciclos. La pendiente en esta área permite determinar la cantidad de ciclos en los que un componente puede fallar según un esfuerzo específico, o, si se conoce cuántos ciclos lleva a una pieza a fallar, se puede deducir el esfuerzo causante de la falla (Wei et al., 2022). Por lo tanto, la ecuación que describe la resistencia a la fatiga en esta área es:

$$\log S'_f = b_s \log N'_t + C \quad (1)$$

donde,  $C$  representa la intersección,  $b_s$  es la pendiente,  $N'_t$  indica el número de ciclos hasta que ocurre la falla y  $S'_f$  es la resistencia frente a la fatiga.

La resistencia a la fatiga  $S'_f$  se despeja de la ecuación anterior quedando como:

$$S'_f = 10^C (N'_t)^{b_s} \quad (2)$$

La ecuación anterior debe ser usada de  $10^3 \leq N'_t \leq 10^6$ . Además, si se conoce la resistencia a la fatiga, es posible despejar el número de ciclos como:

$$N'_t = (S'_f 10^{-c})^{1/b_s} \quad (3)$$

La siguiente ecuación permite calcular la pendiente  $b_s$ :

$$b_s = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{S'_l}{S'_e} \right) \quad (4)$$

donde  $S'_l = 0.75S_u$ .

El valor de  $S'_e$  puede cambiar en función del tipo de carga que soporta el elemento mecánico, para los aceros se utilizan los siguientes:

$$S'_e = 0.5S_u \quad \textit{flexion}$$

$$S'_e = 0.45S_u \quad \textit{axial}$$

$$S'_e = 0.29S_u \quad \textit{torsion}$$

La intersección se determina con la siguiente ecuación:

$$C = \log \left( \frac{(S'_l)^2}{S'_e} \right) \quad (5)$$

También el  $S'_e$  se puede obtener catálogos de materiales o sitios web especializados.

### 2.2.5. Límites de resistencia a la fatiga $S'_e$ y $S_e$

El límite de resistencia a la fatiga representa la región donde, teóricamente, un componente mecánico tiene una vida útil indefinida y no fallará por fatiga. Sin embargo, este valor teórico,  $S'_e$ , puede disminuir debido a factores como el acabado de la superficie, temperatura, forma, carga y condiciones ambientales, definiendo, por tanto, el verdadero límite de resistencia a la fatiga, conocido como  $S_e$  (Santecchia et al., 2016).

### **2.2.5.1. Factores modificadores del límite de resistencia a la fatiga**

En un laboratorio, cuando se lleva a cabo una prueba de fatiga para determinar los límites de resistencia a la fatiga, su ambiente está altamente regulado, por lo que no se puede anticipar que los límites de resistencia a la fatiga de los elementos mecánicos se ajusten con los valores logrados en el laboratorio. Las variaciones en el límite de resistencia a la fatiga dependen de múltiples factores relacionados con el material empleado, el proceso de fabricación, las condiciones de exposición como corrosión o humedad y el diseño del componente. Estos aspectos han sido identificados como determinantes en la determinación de la resistencia a la fatiga, por lo tanto, en el siguiente apartado se muestran y explican los principales factores que influyen en su cuantificación (Pollak & Palazotto, 2009).

#### **2.2.5.1.1. Factor de superficie $k_a$**

Este factor se basa en la calidad del acabado superficial del componente y su resistencia a la tensión.

#### **2.2.5.1.2. Factor de temperatura $k_d$**

Como la temperatura altera las características de los materiales, incluyendo la resistencia a la fatiga y a la fluencia, es imprescindible considerar este elemento de temperatura.

#### **2.2.5.1.3. Factor de carga $k_c$**

El tipo de prueba de fatiga determina el factor de carga, que puede ser de flexión rotatoria, axial o de torsión. Dado que las restricciones de resistencia a la fatiga pueden variar. A continuación, se detallan los valores promedio del factor de carga  $k_c$  de la siguiente manera:

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{flexión} \\ 0.85 & \text{axial} \\ 0.59 & \text{torsión} \end{cases}$$

#### **2.2.5.1.4. Factor de concentración de esfuerzos $k_f$**

Este factor se utiliza para reflejar la disminución del límite de la resistencia a la fatiga a causa de diferentes efectos. Estos efectos pueden influir tanto positiva como negativamente en este límite de resistencia a la fatiga, por lo que, estos efectos se deben de tomar en cuenta.

#### **2.2.5.1.4. Factor de confiabilidad $k_e$**

Este factor de confiabilidad  $k_e$  se utiliza para ajustar el límite de resistencia, teniendo en cuenta la dispersión de los datos y la confiabilidad deseada en un diseño. Dado que los datos se suelen reportar como valores promedio de resistencia a la fatiga, existe una variabilidad natural en los resultados. Para tener en cuenta esta variabilidad y garantizar un nivel de confiabilidad específico, se aplica un factor de modificación basado en la desviación estándar que presentan los datos. Entonces, el factor de confiabilidad ajusta el límite de resistencia a la fatiga para reflejar la probabilidad de falla aceptable en el diseño, considerando la variabilidad inherente en los datos experimentales.

### **2.3 Teoría de Hertz**

La teoría de Hertz constituye la base para comprender los fenómenos de contacto entre dos cuerpos elásticos, y es de especial relevancia en el análisis de rodamientos de bolas, donde estos elementos interactúan con las pistas de los aros en condiciones de alta carga y repetición cíclica. Formulada inicialmente por Heinrich Hertz en 1882, esta teoría proporciona una descripción analítica del campo de deformaciones y tensiones generadas en el contacto de cuerpos con geometría curva (Johnson, 1985).

### **2.3.1. Principios del contacto elástico**

Cuando dos sólidos con superficies curvas entran en contacto bajo una carga normal  $F$ , el área real de contacto es significativamente más pequeña que la superficie aparente. En el caso de rodamientos de bolas, el contacto entre la bola y la pista del aro es puntual en teoría, pero bajo carga se deforma y genera una zona elíptica de contacto (Johnson, 1985).

El aspecto más relevante de la teoría de Hertz en relación con la fatiga de rodamientos es que las tensiones máximas no ocurren en la superficie, sino en una región subsuperficial situada a una profundidad proporcional al radio de contacto. En esa zona, las tensiones cortantes alternantes inducen la propagación de grietas, fenómeno característico de la fatiga de contacto (Bogdański et al., 1999).

### **2.4. Análisis de Confiabilidad**

La confiabilidad se refiere a la integridad cuantitativa de un sistema o componente, destacando su calidad y consistencia en desempeñar su función en condiciones específicas a lo largo del tiempo (Manouchehry Nya et al., 2019). Es fundamental no confundir la confiabilidad con el control estadístico de calidad. Las diferencias principales son:

- La confiabilidad analiza el desempeño de la tasa de falla durante un periodo, en tanto que el control de calidad se enfoca en la proporción de defectuosos en un momento específico.
- La confiabilidad abarca la vida completa de un producto, con énfasis en la etapa de diseño. El proceso de manufactura es el único enfoque del control de calidad.
- Mientras la confiabilidad se ocupa de los conceptos y metodologías que garantizan un diseño exitoso, el control de calidad transforma esos diseños en especificaciones del producto.

- La confiabilidad asegura que el producto sea fiable en todos sus aspectos, desde su diseño hasta su utilización final. En contraste, el control de calidad garantiza que esa confiabilidad no disminuya durante el ensamblaje y la manufactura.
- El control de calidad busca que el producto sea uniforme, dentro de los límites especificados, a un costo aceptable para el consumidor.

Es fundamental entender que sin la supervisión de calidad, ningún producto puede funcionar de manera fiable. Usar componentes de alta calidad y ensamblarlos adecuadamente es esencial para alcanzar la confiabilidad deseada [36].

#### 2.4.1 Distribución Weibull

La ingeniería de confiabilidad hace uso extensivo de la distribución Weibull para modelar la duración de productos que se deterioran debido a fenómenos físicos (Piña-Monarez, 2019).

Si una variable  $W$  tiene distribución Weibull con parámetro de escala  $\eta \geq 0$  y parámetro de forma  $\beta \geq 0$  y se denota como  $W \sim (\eta, \beta)$  si esta función de densidad está dada por:

$$f(t_1) = \frac{\beta_1}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta_1-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta_1}} \quad (6)$$

La confiabilidad es:

$$R(t) = e^{-(\eta t)^\beta} \quad (7)$$

La media o MTTF:

$$T_1 = \eta * \Gamma_1\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (8)$$

$\Gamma$  es Gamma en:

$$\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (9)$$

Gamma está dada por:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (10)$$

La media es:

$$T_{med} = \eta \ln(2)^{1/\beta} \quad (11)$$

La moda es:

$$T_{mod} = \eta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta} \quad (12)$$

La desviación es:

$$\sigma_T = \eta \left( \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Estas ecuaciones permiten obtener la confiabilidad y la estimación de sus parámetros es fundamental para predecir el comportamiento y la resistencia de materiales bajo condiciones de falla.

#### 2.4.1.1 Tasa de Falla de la distribución Weibull

En una distribución Weibull la tasa de falla puede aumentar, disminuir o mantenerse constante, dependiendo del parámetro de forma de la distribución (Y. Wang & Peng, 2020).

$$F(t) = 1 - e^{-(\eta t)^\beta} \quad (14)$$

A continuación, se tiene la distribución Weibull de forma gráfica.

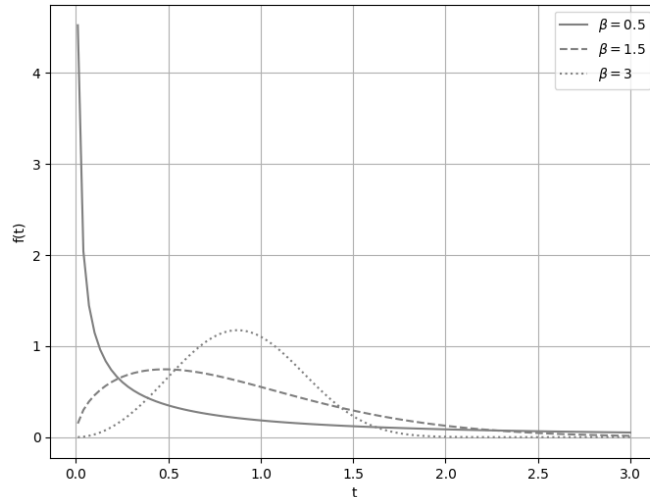


Figura 5. Función de probabilidad Weibull para distintos valores de beta

La figura 5 muestra el comportamiento de la distribución Weibull para tres valores de  $\beta$ , como bien se ha establecido este valor es el que le da la forma a la distribución.

La función de riesgo toma las siguientes, dependiendo del parámetro de forma  $\beta$ :

Cuando  $\beta < 1$  la función de riesgo se presenta como decreciente.

Cuando  $\beta = 1$  la función de riesgo se presenta como constante.

La función de riesgo aumenta si  $\beta > 1$ .

Es adecuado tomar en cuenta  $\beta = 3.44$ , porque con este valor, la distribución Weibull se asemeja a la distribución normal (Mclinn, n.d.).

## 2.4.2 Análisis Estrés-Resistencia Weibull

El análisis de estrés-resistencia se ha utilizado en el diseño mecánico. Este se basa en la probabilidad de falla de que el estrés exceda la resistencia. Cuando se tiene el mismo parámetro de forma  $\beta$  en la distribución del estrés y en la distribución de resistencia, es posible llevar a cabo un análisis de estrés-resistencia Weibull, es decir  $\beta_1 = \beta_2$  (Baro-Tijerina et al., 2020). La metodología para determinar la confiabilidad para el análisis estrés-resistencia cuando  $\beta_1 = \beta_2$  se define como:

$$R(t) = \int_0^\infty \frac{\beta}{\eta_x} \left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^\beta} \left[ \int_x^\infty \frac{\beta}{\eta_y} \left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} dy \right] dx \quad (15)$$

Primero, resolvemos la segunda integral con respecto a “y”:

$$\int_x^\infty \frac{\beta}{\eta_y} \left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} dy \quad (16)$$

$$\frac{\beta}{\eta_y} \int_x^\infty \frac{y^{\beta-1}}{\eta_y^\beta} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} dy \quad (17)$$

$$\frac{\beta}{\eta_y} \cdot \frac{1}{\eta_y^{\beta-1}} \int_x^\infty y^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} dy \quad (18)$$

Para resolver la integral, es necesario completar el diferencial. La derivada del argumento de la función exponencial es:

$$\frac{d}{dy} \left( -\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta \right) = -\frac{y^\beta}{\eta_y^\beta} = -\frac{\beta}{\eta_y^\beta} \cdot y^{\beta-1} \quad (19)$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\frac{\beta}{\eta_y} \cdot \frac{1}{\eta_y^{\beta-1}} \cdot \frac{-\eta_y^\beta}{\beta} \int_x^\infty -\frac{\beta}{\eta_y^\beta} \cdot y^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} dy \quad (20)$$

Ahora, la integral se reduce a:

$$-\int_x^\infty -\frac{\beta}{\eta_y^\beta} \cdot y^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} = -e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} \Big|_x^\infty \quad (21)$$

Evaluamos la función en los límites:

$$-e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} \Big|_x^\infty = -e^{-\left(\frac{\infty}{\eta_y}\right)^\beta} - \left(-e^{-\left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta}\right) \quad (22)$$

$$-e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^\beta} \Big|_x^\infty = e^{-\left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta} \quad (23)$$

Sustituimos este resultado en la primera integral:

$$R = \int_0^\infty \frac{\beta}{\eta_x} \left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^\beta} e^{-\left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta} \quad (24)$$

$$R = \frac{\beta}{\eta_x} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta-1} e^{-\left[\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^\beta + \left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta\right]} dx \quad (25)$$

$$R = \frac{\beta}{\eta_x \eta_x^{\beta-1}} \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\left[\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^\beta + \left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta\right]} dx \quad (26)$$

Para resolver la integral, se ajusta el diferencial de acuerdo con la derivada del argumento de la exponencial es:

$$\frac{d}{dx} \left( -\left[ \left(\frac{x}{\eta_x}\right)^\beta + \left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta \right] \right) = -\left[ \frac{\beta}{\eta_x^\beta} x^{\beta-1} + \frac{\beta}{\eta_y^\beta} x^{\beta-1} \right] \quad (27)$$

$$= -x^{\beta-1} \left( \frac{\beta}{\eta_x^\beta} + \frac{\beta}{\eta_y^\beta} \right) = -x^{\beta-1} \left( \frac{\beta \eta_y^\beta + \beta \eta_x^\beta}{\eta_x^\beta \eta_y^\beta} \right) \quad (28)$$

Ahora sustituimos la derivada en la integral:

$$R = \frac{\beta}{\eta_x^\beta} \int_0^\infty -x^{\beta-1} \left( \frac{\beta \eta_y^\beta + \beta \eta_x^\beta}{\eta_x^\beta \eta_y^\beta} \right) e^{-\left[\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^\beta + \left(\frac{x}{\eta_y}\right)^\beta\right]} dx \quad (29)$$

$$R = -\frac{\beta}{\eta_x^\beta} \cdot \frac{\eta_x^\beta \eta_y^\beta}{\beta(\eta_y^\beta + \eta_x^\beta)} \int_0^\infty -x^{\beta-1} \left( \frac{\beta \eta_y^\beta + \beta \eta_x^\beta}{\eta_x^\beta \eta_y^\beta} \right) e^{-\left[ \left( \frac{x}{\eta_x} \right)^\beta + \left( \frac{x}{\eta_y} \right)^\beta \right]} dx \quad (30)$$

Resolviendo la integral obtenemos:

$$R = -\frac{\eta_y^\beta}{\eta_y^\beta + \eta_x^\beta} \left[ e^{-\left[ \left( \frac{x}{\eta_x} \right)^\beta + \left( \frac{x}{\eta_y} \right)^\beta \right]} \right]_0^\infty \quad (31)$$

Finalmente, evaluando en los límites:

$$R = -\frac{\eta_y^\beta}{\eta_y^\beta + \eta_x^\beta} \left[ e^{-\left[ \left( \frac{\infty}{\eta_x} \right)^\beta + \left( \frac{\infty}{\eta_y} \right)^\beta \right]} - e^{-\left[ \left( \frac{0}{\eta_x} \right)^\beta + \left( \frac{0}{\eta_y} \right)^\beta \right]} \right] \quad (32)$$

$$R = -\frac{\eta_y^\beta}{\eta_y^\beta + \eta_x^\beta} (-1) \quad (33)$$

Por lo tanto, para calcular la confiabilidad es:

$$R = \frac{\eta_y^\beta}{\eta_y^\beta + \eta_x^\beta} \quad (34)$$

### 2.4.3. Matriz de Fisher e Intervalos de Confianza

En la evaluación de confiabilidad, la precisión de los estimadores obtenidos mediante máxima verosimilitud (MLE) se evalúa a partir de la matriz de información de Fisher, la cual permite derivar tanto la varianza individual de los parámetros como su covarianza conjunta. Para determinar los intervalos de confianza de los parámetros de la distribución Weibull, estos valores son fundamentales (ReliaSoft Corporation, 2000).

En el caso de la distribución Weibull con dos parámetros, la función es expresada como:

$$\ln[L] = \Lambda = \sum_{i=1}^R \ln[f(T_i; \theta_1, \theta_2)] + \sum_{i=1}^M \ln[1 - F(S_j; \theta_1, \theta_2)]$$

$$+ \sum_{i=1}^P \ln\{F(I_{lu}; \theta_1, \theta_2) - F(I_{ll}; \theta_1, \theta_2)\}$$
(35)

De acuerdo con la ecuación anterior tenemos que la primera sumatoria corresponde a todos los datos, la segunda para datos censurados a la derecha y la tercera para datos censurados por intervalos o a la izquierda.

Tomando como punto de partida la expresión dada en la ecuación 35, la matriz de Fisher es definida como:

$$F_0 = \begin{bmatrix} E_0 \left[ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_1^2} \right] & E_0 \left[ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] \\ E_0 \left[ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] & E_0 \left[ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_2^2} \right] \end{bmatrix}$$
(36)

La inversa matriz de covarianzas de los parámetros de la distribución Weibull se estima mediante la inversa de esta matriz.

$$\begin{bmatrix} Var(\theta_1) & Cov(\theta_1, \theta_2) \\ Cov(\theta_1, \theta_2) & Var(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix}^{-1}$$
(37)

En conclusión, el marco teórico elaborado integra de manera estructurada los fundamentos de los rodamientos y sus modos de falla, la teoría de fatiga y de contacto de Hertz, así como los principios de confiabilidad aplicados mediante la distribución Weibull, mediante máxima verosimilitud y el uso de la matriz de Fisher para la obtención de intervalos de confianza.

### **3. METODOLOGÍA**

La metodología que se propone a continuación se enfoca en el cálculo de la resistencia mínima de diseño para un rodamiento de bola, y se desarrolla en tres fases. La primera corresponde a la selección del rodamiento mediante la metodología actual (Villa Covarrubias, 2021). La segunda, al cálculo de la confiabilidad real a partir de los esfuerzos principales, y, finalmente, la tercera, a la determinación de la resistencia mínima requerida para mantener una confiabilidad establecida. Esta propuesta metodológica incorpora un enfoque basado en percentiles de resistencia para vincular los parámetros de confiabilidad con las propiedades mecánicas mínimas necesarias. Asimismo, se plantea un procedimiento para ajustar la resistencia del material en función del límite inferior de confiabilidad.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: la sección 3.1 presenta la metodología actual para la selección de un rodamiento de bola. En la sección 3.1.1, se describen los pasos para determinar la confiabilidad del rodamiento seleccionado, y en la sección 3.2, se expone la metodología propuesta para calcular los percentiles de resistencia, con el fin de determinar la resistencia mínima requerida que garantice una confiabilidad de desempeño previamente definida.

#### **3.1. Metodología Actual**

La metodología que actualmente se utiliza para el diseño y selección de rodamientos de bola ha sido utilizada durante varias décadas, siendo ampliamente documentada en estándares y en algunos libros sobre diseño mecánico. Para la selección de un rodamiento, es necesario primero determinar las cargas que este deberá soportar. Para ello se realiza un análisis estático, el cual depende del

tipo de componente mecánico involucrado, como pueden ser engranes, bandas, cadenas o levas. En caso de que existan cargas axiales y radiales, es necesario convertir estas cargas a su equivalente en carga radial mediante la ecuación:

$$P_{eq} = XF_r + YF_a \quad (38)$$

Una vez determinada la carga radial equivalente  $P_{eq}$  se procede con la aplicación de la metodología usada para la selección del rodamiento. Los pasos de la metodología son los que siguen.

### 3.1.1. Pasos para la selección del rodamiento de bola del catálogo del fabricante.

**Paso 1.** Determinar la carga de diseño  $P_d$  que soportará el rodamiento. La carga de diseño se calcula considerando un factor de rotación, el cual será  $V = 1$  si el elemento que gira es el aro interior y  $V = 1.2$  para el aro exterior. Así, basado en la carga radial equivalente  $P_{eq}$ , la carga de diseño se obtiene mediante:

$$P_d = VP_{eq} \quad (39)$$

**Paso 2.** Seleccionar el rodamiento. Del catálogo del fabricante, el rodamiento se selecciona en base a la carga de diseño  $P_d$  y al diámetro  $D$  del rodamiento.

**Paso 3.** Determinar la vida  $L_{10}$  de diseño del rodamiento. Estos datos son proporcionados por el fabricante para calcular la vida útil de acuerdo con la siguiente ecuación (SKF, 2024):

$$L_{10} = 10^6 \left( \frac{C}{P_d} \right)^k \quad (40)$$

Donde  $C$  es la carga dinámica y  $k$  para rodamiento de bolas es ( $k = 3$ ).

A continuación, se describen los pasos necesarios para calcular los esfuerzos que se generan en los rodamientos de bola.

### 3.1.2 Pasos para la determinarlos esfuerzos de Hertz generados bajo la superficie

Se producen esfuerzos debajo de la superficie cuando el balín y la carrera exterior están en contacto. La teoría de Hertz es la que se usa para calcular estos esfuerzos. Esta teoría involucra el conocimiento de varios parámetros, tales como los parámetros geométricos y de material del rodamiento. Los detalles para la obtención de estos parámetros se dan en la tesis doctoral dada en (Villa Covarrubias, 2021). Así, aquí no se presentan los detalles. Los pasos para la determinación de estos parámetros son los siguientes.

**Paso 4.** Determinar la curvatura total del rodamiento. Para calcular la curvatura, se deben extraer del catálogo del producto las medidas de la carrera exterior y del balín. La curvatura total está dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (41)$$

donde:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{ax}} - \frac{1}{r_{bx}} \quad (42)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{ay}} - \frac{1}{r_{by}} \quad (43)$$

con:

$$r_{ax} = r_{ay} \quad (44)$$

$$r_{by} = df_i \quad (45)$$

donde el radio  $r_{by}$  de la pista del aro exterior se determina usando un valor de conformidad  $f_i$  de 0.52. Y para  $r_{bx}$  se determina como:

$$r_{bx} = \frac{d_e - d \cos \beta}{2 \cos \beta} \quad (46)$$

donde,  $d_e$  es el diámetro del balín.  $\beta$  es el ángulo de desface en el balín, que es cero en este caso debido a la presencia de cargas axiales.

**Paso 5.** Determinar la razón de radio de curvatura  $\alpha_r$ . Esta razón de radio representa la proporción de curvatura de  $R_y$  con respecto a  $R_x$  y se utiliza para definir la orientación de la elipse generada por el contacto entre el balín y la carrera exterior. Esta razón se obtiene mediante la siguiente expresión.

$$\alpha_r = \frac{R_y}{R_x} \quad (47)$$

**Paso 6.** Calcular el parámetro de elipticidad ( $k_e$ ) y las ecuaciones elípticas. Con base en el valor obtenido de la razón de radio de curvatura ( $\alpha_r$ ) (ver Figura 6) se procede a seleccionar el conjunto de ecuaciones elípticas apropiadas para describir el contacto. Posteriormente, se calcula el parámetro de elipticidad  $k_e$  mediante la siguiente expresión:

$$k_e = (\alpha_r)^{2/\pi} \quad (48)$$

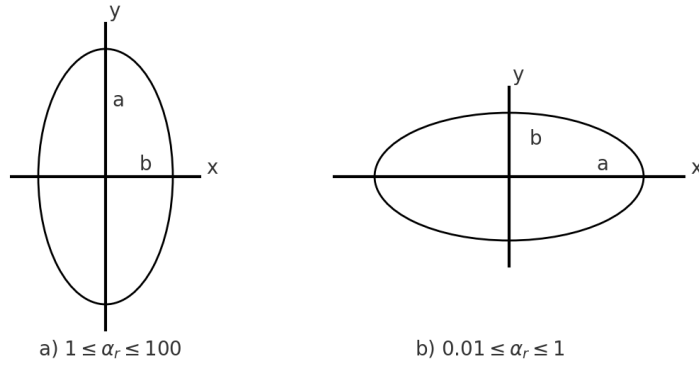


Figura 6. Orientación de la elipse de contacto según la razón de radio.

Para el caso de estudio, la razón de radio de curvatura obtenida es mayor que 1, lo cual indica que la elipse está alargada en la dirección del eje  $y$ . Por esta razón, se seleccionaron las ecuaciones elípticas correspondientes al caso de contacto, en donde el semieje mayor se alinea con el eje  $y$ .

Las ecuaciones elípticas correspondientes se muestran a continuación en la Tabla 1, seleccionadas en función de la razón de radio, las cuales se definen de la siguiente manera:

Tabla 1. Ecuaciones elípticas asociadas a la razón de curvatura.		
Razón de curvatura		
	$1 \leq \alpha_r \leq 100$	$0.01 \leq \alpha_r \leq 1$
Parámetro de elipticidad	$k_e = \alpha_r^{2/\pi}$	$k_e = \alpha_r^{2/\pi}$
Integrales elípticas	$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \ln \alpha_r$ $\mathcal{E} = 1 + \frac{\pi - 2}{2\alpha_r}$	$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \ln \alpha_r$ $\mathcal{E} = 1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \alpha_r$

**Paso 7.** Determinar el módulo de elasticidad efectivo ( $E'$ ). El módulo de elasticidad efectivo ( $E'$ ) se calcula considerando el módulo de elasticidad ( $E$ ) y los coeficientes de Poisson ( $\nu$ ) del material.

Estos valores ya están especificados por el fabricante. La expresión utilizada para obtener  $E'$  es la siguiente:

$$E' = \frac{2}{\frac{(1 - \nu_a^2)}{E_a} + \frac{(1 - \nu_b^2)}{E_b}} \quad (49)$$

Donde  $\nu_a$  es el coeficiente de Poisson correspondiente a la bola, y  $\nu_b$  es el coeficiente de Poisson del aro exterior. De la misma manera  $E_a$  es el módulo de elasticidad de la bola y  $E_b$  es el módulo de elasticidad del aro exterior.

**Paso 8.** Determinar las medidas  $a$  y  $b$  de los semiejes de la elipse que se generan en el punto de contacto entre el balón y la carrera exterior. Los valores de  $a$  y  $b$  se establecen como la mitad de las dimensiones del eje  $y$  ( $D_y$ ) y del eje  $x$  ( $D_x$ ) de la elipse. Por lo tanto,  $a$  simboliza la dimensión que resulte mayor, si  $D_y > D_x$ , entonces  $a = D_y/2$ , en caso contrario, si  $D_x > D_y$ , entonces  $b = D_y/2$ .

$$D_y = 2 \left( \frac{6k_e^2 \mathcal{E} P_d R}{\pi E'} \right)^{1/3} \quad (50)$$

$$D_x = 2 \left( \frac{6 \mathcal{E} P_d R}{\pi k_e E'} \right)^{1/3} \quad (51)$$

**Paso 9.** Determinar el valor de los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ . Estos esfuerzos se desarrollan bajo la superficie de contacto. Para su determinación, es necesario calcular previamente una serie de parámetros intermedios. Las ecuaciones de los esfuerzos son:

$$\sigma_x = [M(\Omega_x + \nu \Omega'_x)] \frac{b}{\Delta} \quad (52)$$

$$\sigma_y = [M(\Omega_y + v\Omega'_y)] \frac{b}{\Delta} \quad (53)$$

$$\sigma_z = - \left[ \frac{M}{2} \left( \frac{1}{n} - n \right) \right] \frac{b}{\Delta} \quad (54)$$

**Paso 9.1.** Calcular el valor de los parámetros,  $k$ ,  $k'$  y  $z$ . La relación funcional de los semiejes elípticos  $a$  y  $b$  está representada por el parámetro  $k$  representa y está dada por:

$$k = \frac{b}{a} \quad (55)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (56)$$

Y el valor de  $z$  es la profundidad donde se genera el máximo esfuerzo dado por la ecuación:

$$z = 0.78b \quad (57)$$

**Paso 9.2.** Determinar los parámetros  $M$ ,  $n$ ,  $\Omega_x$ ,  $\Omega'_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega'_y$  y  $\Delta$ . (SAE AE-7, 1979)

$$M = \frac{2k}{k'^2 \mathcal{E}} \quad (58)$$

$$n = \sqrt{\frac{k^2 + k^2 \left(\frac{z}{b}\right)^2}{1 + k^2 \left(\frac{z}{b}\right)^2}} \quad (59)$$

$$\Omega_x = -\frac{1-n}{2} + k \left(\frac{z}{b}\right) (\mathcal{F} - \mathcal{E}) \quad (60)$$

$$\Omega'_x = -\frac{n}{k^2} + 1 + k \left(\frac{z}{b}\right) \left[ \left(\frac{1}{k^2}\right) \mathcal{E} - \mathcal{F} \right] \quad (61)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \frac{n}{k^2} + k \left(\frac{z}{b}\right) \left[ \left(\frac{1}{k^2}\right) \mathcal{E} - \mathcal{F} \right] \quad (62)$$

$$\Omega'_y = -1 + n + k \left( \frac{Z}{b} \right) (\mathcal{F} - \mathcal{E}) \quad (63)$$

donde las variables  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{F}$  son los valores de las ecuaciones elípticas. Y el parámetro  $\Delta$  se calcula como:

$$\Delta = \frac{1}{A + B} \left( \frac{(1 - \nu_a^2)}{E_a} + \frac{(1 - \nu_b^2)}{E_b} \right) \quad (64)$$

donde:

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{ay}} - \frac{1}{r_{by}} \right) \quad (65)$$

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{ax}} + \frac{1}{r_{bx}} \right) \quad (66)$$

Estos valores son substituidos en las ecuaciones de los esfuerzos.

**Paso 10.** Determinar el esfuerzo cortante máximo  $\tau_{max}$ . Este esfuerzo es el que genera la falla, y para determinarlo se sigue con la siguiente ecuación:

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2} \quad (67)$$

En la ecuación anterior,  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y  $\sigma_{m\acute{i}n}$ , se toman de acuerdo con el valor del esfuerzo que sea mayor y del valor del esfuerzo menor.

### 3.1.3 Pasos para determinar la confiabilidad real del rodamiento de bola

**Paso 11.** Determinar la matriz de esfuerzos. Se genera la matriz de esfuerzos principales en el plano, considerando las componentes más representativas en el análisis de contacto:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  corresponden a los esfuerzos principales (mayor y menor) bajo la superficie de contacto.

**Paso 12.** Determinar los parámetros de la distribución Weibull en esfuerzo. Con base en la matriz de esfuerzos, se calculan los parámetros característicos de la distribución Weibull para condiciones de uso (Piña-Monarez, 2018):

$$\eta_{uso} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \quad (69)$$

$$\beta_{uso} = \frac{-4(\mu_y)}{0.995 \ln\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)} \quad (70)$$

Tenga en cuenta que estos parámetros se denominan de uso por que se obtuvieron a partir de los esfuerzos reales de aplicación.

**Paso 13.** Determinar la vida  $L_{10\ uso}$  de acuerdo con la familia Weibull calculada en el paso 12.

$$L_{10\ uso} = (-\ln(R(t)))^{1/\beta} \cdot \eta \quad (71)$$

**Paso 14.** Calcular la vida  $L_{10}$  del catálogo de acuerdo con la carga dinámica y la carga de diseño.

$$L_{10} = 10^6 \left(\frac{C}{P_d}\right)^3 \quad (72)$$

**Paso 15.** Determinar la  $\eta$  en ciclos. Usando la función de confiabilidad Weibull determine la  $\eta$  en ciclos, utilizando la vida  $L_{10}$ .

$$\eta_{ciclos} = \exp \left\{ \ln(L_{10}) - \frac{\ln(-\ln(0.9))}{\beta} \right\} \quad (73)$$

**Paso 16.** Calcular los coeficientes de fatiga. Utilizando la curva S-N del material, estos coeficientes se obtienen por medio de la ecuación de Basquin usando los valores de las propiedades mecánicas del material. Para encontrar los coeficientes  $b_s$  y  $C$ , primero es necesario encontrar  $S'_l$  y  $S'_e$ , donde:

$$S'_l = 0.75S_u \quad (74)$$

$$S'_e = 0.45S_u \quad (75)$$

Por lo tanto, la pendiente  $b_s$  se obtiene como sigue:

$$b_s = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{S'_l}{S'_e} \right) \quad (76)$$

Y la intersección  $C$ :

$$C = \log \left( \frac{S'_l{}^2}{S'_e} \right) \quad (77)$$

**Paso 17.** Convertir  $\eta_{ciclos}$  a  $\eta_{resistencia}$ .

$$\eta_{resistencia} = (10^C)(\eta_{ciclos})^{b_s} \quad (78)$$

**Paso 18.** Determinar la confiabilidad real.

$$R(t) = \exp \left\{ - \left( \frac{L_{10\ uso}}{\eta_{resistencia}} \right)^\beta \right\} \quad (79)$$

### 3.2 Metodología para Mejoramiento de la Confiabilidad

La metodología propuesta permite determinar la resistencia mínima que un elemento debe tener para presentar la confiabilidad deseada en el límite inferior esperado de desempeño. Esta propuesta resulta relevante en aplicaciones críticas, donde fallas por debajo de la confiabilidad representan un riesgo inaceptable. Los pasos de la metodología propuesta son los siguientes.

#### 3.2.1 Pasos para determinar el valor de resistencia mínima del material que cumple con una confiabilidad mínima especificada

**Paso 19.** Determinar tamaño de la muestra que corresponde a la confiabilidad establecida.

$$n = \frac{-1}{\ln(R(t))} \quad (80)$$

**Paso 20.** Determinar los valores de rangos medianos  $Y_i$  que corresponden al tamaño de muestra dado en la ec.(80).

$$Y_i = \ln \left( -\ln \left( 1 - \left( \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \right) \right) \right) \quad (81)$$

**Paso 21.** Usando el valor de beta conocido ( $\beta = 1.28$ ) predecir los tiempos a la falla.

$$t_i = \exp \left\{ \frac{Y_i}{\beta} \right\} * \eta \quad (82)$$

**Paso 22.** Usando los datos predichos, estime los parámetros Weibull  $\beta$  y  $\eta$  usando el estimador de máxima verosimilitud, y de la matriz de Fisher determine la desviación de  $\eta$ .

$$\sigma_\eta = \sqrt{Var(\eta)} \quad (83)$$

**Paso 23.** Calcular el tiempo requerido para la confiabilidad deseada mediante la siguiente ecuación:

$$t = \frac{\eta}{n^{1/\beta}} \quad (84)$$

**Paso 24.** Determine el nivel de confianza  $CL$  deseado, y calcule el tamaño de muestra  $n_2$  que le corresponde a través de la ecuación:

$$n_2 = \frac{\ln(1 - CL)}{\ln(R(t))} \quad (85)$$

**Paso 25.** Calcular los límites de  $\eta$  ( $\eta_U$  y  $\eta_L$ ) a través de las siguientes ecuaciones:

$$\eta_U = n_2^{1/\beta} * t \quad (86)$$

$$\eta_L = \frac{\eta^2}{\eta_U} \quad (87)$$

**Paso 26.** Establecer  $\eta_U$  superior como  $\eta$  media y  $\eta_L$  inferior como  $\eta$  media y volver a calcular el límite superior de  $\eta$ .

**Paso 27.** Calcular el valor del estadístico  $Z$  de la distribución normal ( $k_\alpha$ ) mediante la ecuación y el valor del nivel de confianza correspondiente:

$$k_\alpha = -\ln\left(\left(\frac{\eta_L}{\eta_U}\right)^{1/2}\right) * \left(\frac{\eta}{\sigma_\eta}\right) \quad (88)$$

**Paso 28.** Determinar los límites superior e inferior de  $\eta$  para cada percentil de la distribución normal deseado. En este caso usamos los percentiles que corresponden a  $1\sigma$  (68.27%),  $2\sigma$  (95.45%) y  $3\sigma$  (99.73%).

## 4. RESULTADOS

En esta sección se describe el caso de aplicación y se detalla paso a paso, numéricamente la determinación de los parámetros de la metodología que nos permiten determinar la resistencia mínima necesaria que el rodamiento seleccionado debe tener para que este presente un valor de  $\eta$  tal que el límite inferior de confiabilidad sea de 90%.

### 4.1 Descripción del Caso de Aplicación

Se eligió el eje intermedio de un reductor de velocidad como caso para poner en práctica la metodología desarrollada, lo que requiere la selección de los rodamientos apropiados. Este dispositivo reductor se emplea para reducir la velocidad de un motor eléctrico de 1800 rpm a 450 rpm. Se encuentra acoplado a un ventilador y es utilizado en un proceso de secado de granos. Se transmiten 12 hp.

El análisis se enfocó específicamente en el eje 2, cuyo propósito es disminuir la velocidad de 1800 rpm a 900 rpm, sin cambiar la potencia. Este eje, que está hecho de acero AISI 1020, tiene un diámetro mínimo de 45 mm y funciona a una velocidad constante de 900 rpm. El sistema de engranajes está compuesto por un engrane B, con un diámetro de paso de 5 pulgadas, y un engrane C, con un diámetro de paso de 3 pulgadas, ambos presentan un ángulo de presión de 20°. A partir de este caso se determinan los esfuerzos principales ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ ) y se evalúa la confiabilidad real del rodamiento bajo condiciones reales de operación.

#### 4.1.1 Pasos para la selección del rodamiento de bola del catálogo del fabricante.

**Paso 1.** Determine la carga equivalente  $P_{eq}$ . Utilizando un factor de rotación  $V = 1$ , la carga de diseño  $P_d$  es:

$$P_d = (1)(540.92 \text{ lb}) = 540.92 \text{ lb} = 2406.13 \text{ N}$$

**Paso 2.** Seleccione el rodamiento. Se seleccionó un rodamiento con un diámetro de 45 mm y su carga radial de  $P_d = 2406.13 \text{ N}$ . En la búsqueda en el catálogo, se identificó el rodamiento que mejor se ajusta a los requerimientos del diseño, siendo el 6009 del fabricante SKF.

**Paso 3.** Determine la vida  $L_{10}$  de diseño del rodamiento. Con los datos de rodamiento (datos que proporciona el fabricante) se calculó la vida útil siendo:

$$L_{10} = L_1 \left( \frac{C}{P_d} \right)^k = 10^6 \left( \frac{22100 \text{ N}}{2406.13 \text{ N}} \right)^3 = 774.85 \times 10^6 \text{ rev}$$

#### 4.1.2 Pasos para la determinarlos esfuerzos de Hertz generados bajo la superficie

**Paso 4.** Determine la curvatura total del rodamiento. Usando las dimensiones de la carrera exterior y del balín, la curvatura total está dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = 200.52 \text{ m} + 8.83 \text{ m} = 209.35 \text{ m}$$

$$R = 4.77 \times 10^{-3} \text{ m}$$

donde:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{4.365 \times 10^{-3} \text{ m}} - \frac{1}{35.003125 \times 10^{-3} \text{ m}} = 200.52 \text{ m}$$

$$R_x = 4.986 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{4.365 \times 10^{-3} \text{ m}} - \frac{1}{4.54 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8.83 \text{ m}$$

$$R_y = 0.1132 \text{ m}$$

donde:

$$r_{ax} = r_{ay} = 4.365 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$r = r_{bx} = 35.003125 \text{ mm} = 35.003125 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Y, dado que no se tiene el radio  $r_{by}$  de la pista del aro exterior, se utiliza la ecuación siguiente, , empleando un valor de conformidad de 0.52.

$$r_{by} = dR_r = (8.731 \text{ mm})(0.52) = 4.54 \text{ mm} = 4.54 \times 10^{-3} \text{ m}$$

**Paso 5.** Determine la razón de radio de curvatura  $\alpha_r$ . Usando los valores obtenidos en el paso 4 la razón de radio es:

$$\alpha_r = \frac{R_y}{R_x} = \frac{0.1132 \text{ m}}{4.986 \times 10^{-3} \text{ m}} = 22.70$$

**Paso 6.** Calcule el parámetro de elipticidad ( $k_e$ ) y las ecuaciones elípticas. Para este caso se seleccionaron las correspondientes a una razón de radio de 22.7, por lo que el parámetro de elipticidad es:

$$k_e = (\alpha_r)^{2/\pi} = (22.70)^{2/\pi} = 7.299$$

Por lo tanto, los valores de las ecuaciones elípticas son:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} + q_a \ln \alpha_r = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \ln(22.70) = 3.353$$

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{q_a}{\alpha_r} = 1 +$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{22.70} = 1.025$$

donde

$$q_a = \frac{\pi}{2} - 1$$

**Paso 7.** Determine el módulo de elasticidad efectivo ( $E'$ ). Usando los valores del material especificados por el fabricante. Numéricamente su valor es:

$$E' = \frac{2}{\frac{(1 - \nu_a^2)}{E_a} + \frac{(1 - \nu_b^2)}{E_b}} = \frac{2}{\frac{(1 - 0.30^2)}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} + \frac{(1 - 0.30^2)}{200 \times 10^9 \text{ Pa}}} = 219780219780 \text{ Pa}$$

**Paso 8.** Determine las dimensiones  $a$  y  $b$  de los semiejes de la elipse siendo:

$$D_y = 2 \left( \frac{(6)(7.299)^2(1.025)(2406.13 \text{ N})(4.77 \times 10^{-3} \text{ m})}{\pi(219780219780 \text{ N/m}^2)} \right)^{1/3} = 3.518 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D_x = 2 \left( \frac{(6)(1.025)(2406.13 \text{ N})(4.77 \times 10^{-3} \text{ m})}{\pi(7.299)(219780219780 \text{ N/m}^2)} \right)^{1/3} = 4.82 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Por lo tanto,

$$a = \frac{3.518 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} = 1.759 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.759 \text{ mm}$$

$$b = \frac{4.82 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} = 2.41 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.241 \text{ mm}$$

**Paso 9.** Determine el valor de los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ .

Primero se calcularon los parámetros intermedios que se muestran a continuación.

**Paso 9.1.** Determine los valores de los parámetros,  $k$ ,  $k'$  y  $z$ . El parámetro  $k$  simboliza la relación funcional de los semiejes elípticos  $a$  y  $b$  y está dada por:

$$k = \frac{b}{a} = \frac{0.241 \text{ mm}}{1.759 \text{ mm}} = 0.137$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - (0.137)^2} = 0.9905$$

Y el valor de  $z$  es:

$$z = 0.78b = 0.78(0.241 \text{ mm}) = 0.18798 \text{ mm} = 0.18798 \times 10^{-3} \text{ m}$$

**Paso 9.2.** Determine los parámetros  $M$ ,  $n$ ,  $\Omega_x$ ,  $\Omega'_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega'_y$  y  $\Delta$ . Estos parámetros son:

$$M = \frac{2k}{k'^2 \mathcal{E}} = \frac{2(0.137)}{(0.9905)^2(1.025)} = 0.2724$$

$$n = \frac{\sqrt{k^2 + k^2 \left(\frac{z}{b}\right)^2}}{\sqrt{1 + k^2 \left(\frac{z}{b}\right)^2}} = \frac{\sqrt{(0.137)^2 + (0.137)^2 \left(\frac{0.18789}{0.241}\right)^2}}{\sqrt{1 + (0.137)^2 \left(\frac{0.18789}{0.241}\right)^2}} = 0.1727$$

$$\Omega_x = -\frac{1-n}{2} + k \left(\frac{z}{b}\right) (\mathcal{F} - \mathcal{E}) = -\frac{1-0.1727}{2} + 0.137 \left(\frac{0.18798}{0.241}\right) (3.353 - 1.025)$$

$$\Omega_x = -0.1648$$

$$\begin{aligned} \Omega'_x &= -\frac{n}{k^2} + 1 + k \left(\frac{z}{b}\right) \left[ \left(\frac{1}{k^2}\right) \mathcal{E} - \mathcal{F} \right] \\ &= -\frac{0.1727}{(0.137)^2} + 1 + 0.137 \left(\frac{0.18798}{0.241}\right) \left[ \left(\frac{1}{(0.137)^2}\right) (1.025) - 3.353 \right] \end{aligned}$$

$$\Omega'_x = -2.7238$$

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \frac{n}{k^2} + k \left(\frac{z}{b}\right) \left[ \left(\frac{1}{k^2}\right) \mathcal{E} - \mathcal{F} \right] \\ &= \frac{1}{2(0.1727)} + \frac{1}{2} - \frac{0.1727}{(0.137)^2} + 0.137 \left(\frac{0.18798}{0.241}\right) \left[ \left(\frac{1}{(0.137)^2}\right) (1.025) - 3.353 \right] \end{aligned}$$

$$\Omega_y = -0.3286$$

$$\Omega'_y = -1 + n + k \left(\frac{z}{b}\right) (\mathcal{F} - \mathcal{E}) = -1 + 0.1727 + 0.137 \left(\frac{0.18798}{0.241}\right) (3.353 - 1.025)$$

$$\Omega'_y = -0.5785$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{A+B} \left( \frac{(1-v_a^2)}{E_a} + \frac{(1-v_b^2)}{E_b} \right) \\ &= \frac{1}{4.415 \text{ m}^{-1} + 100.26 \text{ m}^{-1}} \left( \frac{1-0.3^2}{200 \times 10^9 \text{ N/m}^2} + \frac{1-0.3^2}{200 \times 10^9 \text{ N/m}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta = 8.6933 \times 10^{-14} \text{ m}^3 / \text{N}$$

Donde,

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{ay}} - \frac{1}{r_{by}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4.365 \times 10^{-3} \text{ m}} + \frac{1}{-4.54 \times 10^{-3} \text{ m}} \right) = 4.415 \text{ m}^{-1}$$

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_{ax}} + \frac{1}{r_{bx}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4.365 \times 10^{-3} \text{ m}} + \frac{1}{-35.003125 \times 10^{-3} \text{ m}} \right) = 100.26 \text{ m}^{-1}$$

Y sustituyendo los valores cálculos en las ecuaciones de los esfuerzos se obtiene el valor de estos que son:

$$\sigma_x = [M(\Omega_x + v\Omega'_x)] \frac{b}{\Delta} = [0.2724(-0.1648 + (0.3)(-2.7238))] \frac{0.000241}{8.6933 \times 10^{-14}}$$

$$\sigma_x = -741522665.686 \text{ Pa}$$

$$\sigma_y = [M(\Omega_y + v\Omega'_y)] \frac{b}{\Delta} = [0.2724(-0.3286 + (0.3)(-0.5785))] \frac{0.000241}{8.6933 \times 10^{-14}}$$

$$\sigma_y = -384772372.51 \text{ Pa}$$

**Paso 10.** Determine el esfuerzo cortante máximo  $\tau_{max}$ . El valor de esfuerzo es:

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2} = \frac{(2152276334.65 - 384772372.51)}{2}$$

$$\tau_{max} = 883751981.07 \text{ Pa}$$

#### 4.1.3 Pasos para determinar la confiabilidad real del rodamiento de bola

**Paso 11.** Determine la matriz de esfuerzos. Esta matriz se compone de los esfuerzos calculados en el paso 9, quedando la matriz como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2152276334.65 & 0 \\ 0 & 384772372.51 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

**Paso 12.** Determine los parámetros de la distribución Weibull en esfuerzo. Sustituyendo los valores de los esfuerzos principales se obtiene los siguientes valores:

$$\eta_{uso} = \sqrt{(2152276334)(384772372.51)} = 910020039.1 \text{ Pa} = 910.02 \text{ MPa}$$

$$\beta_{uso} = \frac{-4(\mu_y)}{0.995 \ln\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)} = \frac{-4(-0.54562412)}{0.995 \ln\left(\frac{2152276334.65}{384772372.51}\right)} = 1.274062697 \approx 1.28$$

**Paso 13.** Determinar la vida  $L_{10 \text{ uso}}$  de acuerdo con la familia Weibull calculada en el paso 12.

$$L_{10\ uso} = (-\ln(R(t)))^{1/\beta} \cdot \eta = 156862111 = 156.862111\ MPa$$

**Paso 14.** Calcule la vida  $L_{10}$  del catálogo. Usando la carga dinámica y la carga de diseño se obtiene que la vida es:

$$L_{10} = 10^6 \left( \frac{22100\ MPa}{2406.13\ MPa} \right)^3 = 774853425.1\ \text{ciclos}$$

**Paso 15.** Determine la  $\eta$  en ciclos.

$$\eta_{\text{ciclos}} = \exp \left\{ \ln(L_{10}) - \frac{\ln(-\ln(0.9))}{\beta} \right\} = \exp \left\{ \ln(774853425.1) - \frac{\ln(-\ln(0.9))}{1.28} \right\}$$

$$\eta_{\text{ciclos}} = 4495235590\ \text{ciclos} = 4495.23559\ \text{ciclos}$$

**Paso 16.** Calcule los coeficientes de fatiga. Usando los valores de las propiedades mecánicas del material se tiene que:

$$S'_l = 0.75S_u = 0.75(2400) = 1800\ MPa$$

$$S'_e = 0.45S_u = 0.45(2400) = 1080\ MPa$$

Por lo tanto, la pendiente  $b_s$  es:

$$b_s = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{S'_l}{S'_e} \right) = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{1800\ MPa}{1080\ MPa} \right) = -0.073949583$$

Y la intersección  $C$ :

$$C = \log \left( \frac{S'_l{}^2}{S'_e} \right) = \log \left( \frac{1800^2\ MPa}{1080\ MPa} \right) = 3.477121255$$

**Paso 17.** Convierta  $\eta_{\text{ciclos}}$  a  $\eta_{\text{resistencia}}$ . Sustituyendo los valores del paso anterior se tiene que la  $\eta$  en esfuerzo es:

$$\eta_{\text{resistencia}} = (10^C)(\eta_{\text{ciclos}})^{b_s} = (10^{3.4771})(4495235590)^{-0.0739} = 579.8347423$$

**Paso 18.** Determine la confiabilidad real. Resolviendo la ecuación se tiene que la confiabilidad real es:

$$R(t) = \exp \left\{ - \left( \frac{L_{10 \text{ uso}}}{\eta_{\text{esfuerzo}}} \right)^\beta \right\} = \exp \left\{ - \left( \frac{156.862111}{579.8347423} \right)^\beta \right\} = 0.8289$$

Obsérvese que la confiabilidad estimada de 0.8289 es inferior a la requerida del 0.9. Por lo tanto, para alcanzar dicha confiabilidad, será necesario incrementar la resistencia mínima del material de modo que el producto cumpla con el nivel de confiabilidad especificado de 0.9.

## 4.2. Metodología para Mejoramiento de la Confiabilidad

Esta metodología permite ajustar el diseño del rodamiento tomando como referencia un valor de confiabilidad mínima predefinida (por ejemplo,  $R(t) = 0.90$ ). Su objetivo es asegurar que el rodamiento cumpla con dicho valor en el límite más bajo del intervalo de confianza.

### 4.2.1 Pasos para determinar el valor de resistencia mínima del material que cumple con una confiabilidad mínima especificada

**Paso 19.** Determine el tamaño de muestra de acuerdo con la confiabilidad establecida para el análisis.

$$n = \frac{-1}{\ln(0.9)} = 9.4912$$

**Paso 20.** Determine los valores de rangos medianos  $Y_i$  que corresponden al tamaño de muestra calculado en el paso 19.

Tabla 2. Valores de rangos medianos  $Y_i$ .

$Y_i$	-2.6638	-1.7232	-1.2020	-0.8216	-0.5086	-0.2303	0.0329	0.2990	0.5939	0.9926
-------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	--------	--------	--------	--------

**Paso 21.** Estime los tiempos a la falla.

Tabla 3. Predicción de tiempos a la falla.

$t_i$	113.558	236.783	354.253	355.798	611.615	760.116	933.711	1149.479	1447.349	1976.302
-------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	----------	----------	----------

**Paso 22.** Determine la desviación de  $\eta$ . La matriz de Fisher se logra a partir de los datos de los tiempos a la falla, quedando como:

$$\begin{pmatrix} Var \beta = 0.1096 & Cov \eta\beta = 12.5345 \\ Cov \eta\beta = 12.5345 & Var \eta = 58847 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la desviación de  $\eta$  es:

$$\sigma_{\eta} = \sqrt{59417} = 243.7560$$

**Paso 23.** Determine el tiempo requerido para la confiabilidad deseada.

$$t = \frac{\eta}{n^{1/\beta}} = \frac{910 \text{ MPa}}{9.49^{1/1.28}} = 156.86$$

**Paso 24.** Calcule el tamaño de muestra correspondiente al nivel de confianza quedando:

$$n_2 = \frac{\ln(1 - CL)}{\ln(R(t))} = \frac{\ln(1 - 0.75)}{\ln(0.9)} = 13.15$$

**Paso 25.** Calcule los límites de  $\eta$  ( $\eta_U$  y  $\eta_L$ ):

$$\eta_U = (13.15)^{1/1.28} * 156.86 = 1174.54 \text{ MPa}$$

$$\eta_L = \frac{(910 \text{ MPa})^2}{1174.54 \text{ MPa}} = 705.04 \text{ MPa}$$

**Paso 26.** Establezca  $\eta_U$  como  $\eta$  media y a su vez esta como  $\eta_L$ . Por lo que,  $\eta = 1174.54 \text{ MPa}$  y  $\eta_L = 910 \text{ MPa}$ . Y volver a calcular los límites quedando  $\eta_U = 1515.97 \text{ MPa}$  y  $\eta_L = 910 \text{ MPa}$ .

**Paso 27.** Determine el valor Z de la distribución normal. Para la familia Weibull calculada queda como:

$$k_\alpha = -\ln\left(\left(\frac{\eta_L}{\eta_U}\right)^{1/2}\right) * \left(\frac{\eta}{\sigma_\eta}\right) = -\ln\left(\left(\frac{910 \text{ MPa}}{1515.97 \text{ MPa}}\right)^{1/2}\right) * \left(\frac{1174.54}{243.52}\right)$$

**Paso 28.** Determine los límites de  $\eta$  para cualquier percentil deseado. Para este caso  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  son:

Tabla 4. Estimación de los límites superior e inferior de  $\eta$  y confiabilidad según percentiles.

	Percentil	$z$	$\eta_U$	$\eta$	$\eta_L$	$CL$	$R(t)_U$	$R(t)_L$
		1.2355	1515.97	1174.53	910.00	0.7500	0.9467	0.9000
$1\sigma$	0.6827	0.4753	1295.67	1174.53	1064.72	0.6782	0.9352	0.9174
$2\sigma$	0.9545	1.6901	1665.20	1174.53	828.44	0.7905	0.9525	0.8880
$3\sigma$	0.9973	2.7821	2086.49	1174.53	661.17	0.8758	0.9642	0.8534

Los pasos 19 al 26 de la metodología permiten determinar la familia Weibull correspondiente a una confiabilidad en el límite inferior de  $R(t) = 0.9$ . Posteriormente, en los pasos 27 y 28, el procedimiento se extiende para evaluar la confiabilidad de un elemento basándose en varios percentiles de la distribución normal. En este trabajo se consideraron los niveles de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  como referencia.

Para evidenciar el mejoramiento de la confiabilidad y determinar el nuevo rodamiento, es necesario recalcular la capacidad de carga dinámica siguiendo los siguientes pasos:

1. Calcule la  $\eta_{ciclos}$

$$\eta_{ciclos} = \left(\frac{\eta_{resist}}{10^C}\right)^{1/b} = \left(\frac{1174.54 \text{ MPa}}{10^{3.4771}}\right)^{1/-0.0739} = 324031.675$$

2. Calcular la vida  $L_{10}$

$$L_{10} = (\eta_{ciclos})(-\ln(0.9))^{1/\beta} = (324031.675)(-\ln(0.9))^{1/1.28} = 558539592$$

3. Calcular la capacidad de carga dinámica

$$C = (P_d) \left( \frac{L_{10}}{10^6} \right)^{1/3} = (2406.13 \text{ N}) \left( \frac{558539592}{10^6} \right)^{1/3} = 9197.49 \text{ N} = 9.19 \text{ kN}$$

Por lo tanto, se debe seleccionar un rodamiento del catálogo del fabricante que mantenga el diámetro interior de 45 mm y que posea una capacidad de carga dinámica de 9.19 kN. En consecuencia, se recomienda el rodamiento SKF 71909 ACEGA/HCP4A (ver Figura 7).



Figura 7. Rodamiento SKF 71909 ACEGA/HCP4A.

Las especificaciones técnicas del rodamiento de la figura 7 se describen en la siguiente tabla.

Tabla 5. Especificaciones del rodamiento SKF 71909 ACEGA/HCP4A

<b>Dimensiones</b>	<b>Rendimiento</b>		
Diámetro del agujero	45 mm	Capacidad de carga dinámica	9.75 kN
Diámetro exterior	68 mm	Capacidad de carga estática	6.4 kN
Ancho	12 mm		

En resumen, la aplicación de la metodología permitió identificar el rodamiento SKF 71909 ACEGA/HCP4A como la alternativa, al cumplir con las restricciones geométricas establecidas y alcanzar la confiabilidad del 90% en el límite inferior de diseño.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se elaboró una metodología para determinar la resistencia mínima de diseño en el límite inferior de un rodamiento de bola sujeto a fatiga con una confiabilidad del 90 %, usando la distribución Weibull, la matriz de Fisher y el análisis de percentiles.

En primer lugar, se demostró que la metodología actual que se basa la vida  $L_{10}$  tiende a sobreestimar la confiabilidad real de los rodamientos. El caso de estudio aplicado a un rodamiento SKF 6009 en un reductor de velocidad mostró una confiabilidad inicial de 0.8289, valor inferior al 0.9 requerido, lo que confirma la necesidad de enfoques más robustos que consideren la variabilidad estadística.

La metodología propuesta permitió calcular una vida característica nominal de  $\eta = 910 \text{ MPa}$ , con un parámetro de forma  $\beta = 1.28$  y una desviación estándar  $\sigma = 243.76$ , valores que fueron empleados para determinar los percentiles inferiores ( $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ ).

El resultado más significativo es que, al aplicar el procedimiento metodológico y ajustar los límites inferiores, se logró garantizar que en  $\eta_L = 910 \text{ MPa}$  la confiabilidad alcanzara el 90 % en el límite inferior del intervalo de confianza. Esto valida que el método propuesto cumple con el objetivo planteado y supera las limitaciones de los modelos convencionales.

Finalmente, este trabajo contribuye al avance de la ingeniería de confiabilidad aplicada a rodamientos, proporcionando una herramienta metodológica que puede ser extendida a otros elementos mecánicos críticos, fortaleciendo así la seguridad, la robustez y la eficiencia en el diseño de sistemas mecánicos.

## 6. REFERENCIAS

- Abdullah, M. U., Khan, Z. A., Kruhoeffler, W., & Blass, T. (2020). A 3D Finite Element Model of Rolling Contact Fatigue for Evolved Material Response and Residual Stress Estimation. *Tribology Letters*, 68(4). <https://doi.org/10.1007/s11249-020-01359-w>
- ANSI/ABMA. (1990). *Load Ratings And Fatigue Life For Ball Bearings*.
- Baro-Tijerina, M., Piña-Monárrez, M. R., & Villa-Covarrubias, B. (2020). Stress-strength weibull analysis with different shape parameter  $\beta$  and probabilistic safety factor. *DYNA (Colombia)*, 87(215), 28–33. <https://doi.org/10.15446/dyna.v87n215.84909>
- Bogdański, S., Stupnicki, J., Brown, M. W., & Cannon, D. F. (1999). A two dimensional analysis of mixed-mode rolling contact fatigue crack growth in rails. *European Structural Integrity Society*, 25(C), 235–248. [https://doi.org/10.1016/S1566-1369\(99\)80018-1](https://doi.org/10.1016/S1566-1369(99)80018-1)
- Castillo, E., & Canteli, A. F. (2009). *A Unified Statistical Methodology for Modeling Fatigue Damage*.
- Hamrock, B. J. ; D. D. (1981). *Ball Bearing Mechanics*.
- Harik, V. M., Klinger, J. R., & Bogetti, T. A. (2002). Low-cycle fatigue of unidirectional composites: Bi-linear S-N curves. In *International Journal of Fatigue* (Vol. 24). [www.elsevier.com/locate/ijfatigue](http://www.elsevier.com/locate/ijfatigue)
- Harris, T. A. (1985). *A New Fatigue Life Model for Rolling Bearings*. <http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use>
- Harris, T. A. ; K. M. N. (2007). *Advanced Concepts of Bearing Technology* (Fifth Edition).
- Hart, E., Clarke, B., Nicholas, G., Kazemi Amiri, A., Stirling, J., Carroll, J., Dwyer-Joyce, R., McDonald, A., & Long, H. (2020). A review of wind turbine main bearings: Design, operation, modelling, damage mechanisms and fault detection. In *Wind Energy Science* (Vol. 5, Issue 1, pp. 105–124). Copernicus Publications. <https://doi.org/10.5194/wes-5-105-2020>
- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731>
- Kececioglu, Dimitri. (2005). *Robust engineering design-by-reliability with emphasis on mechanical components & structural reliability. Volume 1*.
- Lorén, S., & Lundström, M. (2005). Modelling curved S-N curves. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 28(5), 437–443. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2005.00876.x>
- Manouchehry Nya, R., Abdullah, S., & Singh Karam Singh, S. (2019). Reliability-based fatigue life of vehicle spring under random loading. *International Journal of Structural Integrity*, 10(5), 737–748. <https://doi.org/10.1108/IJSI-03-2019-0025>
- Mclinn, J. A. (n.d.). *Practical Weibull Analysis Techniques-Fifth Edition Probability-Weibull Time, (t) Unreliability, F(t)*.
- Meggiolaro, M. A., Castro, J. T. P., & de Moura Nogueira, R. (2018, February 15). *A FAST ROTATING BENDING FATIGUE TEST MACHINE*. <https://doi.org/10.26678/abcm.cobem2017.cob17-1824>
- Piña-Monarez, M. R. (2018). Weibull stress distribution for static mechanical stress and its stress/strength analysis. *Quality and Reliability Engineering International*, 34(2), 229–244. <https://doi.org/10.1002/qre.2251>
- Piña-Monarez, M. R. (2019). Weibull analysis for normal/accelerated and fatigue random vibration test. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(7), 2408–2428. <https://doi.org/10.1002/qre.2532>

- Pollak, R. D., & Palazotto, A. N. (2009). A comparison of maximum likelihood models for fatigue strength characterization in materials exhibiting a fatigue limit. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(2), 236–241. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2008.06.006>
- ReliaSoft Corporation. (2000). *Weibull ++ Life Data Analysis Reference*.
- SAE AE-7. (1979). *Universal Joint and Driveshaft Design Manual*.
- Santecchia, E., Hamouda, A. M. S., Musharavati, F., Zalnezhad, E., Cabibbo, M., El Mehtedi, M., & Spigarelli, S. (2016). A Review on Fatigue Life Prediction Methods for Metals. In *Advances in Materials Science and Engineering* (Vol. 2016). Hindawi Limited. <https://doi.org/10.1155/2016/9573524>
- Schlitz, W. (1996). A HISTORY OF FATIGUE. In *Pergamon Engineering Fracture Mechanics* (Vol. 54, Issue 2).
- Schmid, S. R., Hamrock, B. J., Schmid, B. O. J., & Jacobson, H. (2014). *Fundamentals of Machine Elements* (3rd ed.).
- SKF. (2024). *Bearing life*. <https://www.skf.com/mx/products/thin-section-bearings/introduction-thin-section/bearing-load-and-life/bearing-life>
- Suresh, S. (1998). *Fatigue of Materials* (Second Edition).
- Villa Covarrubias, B. (2021). *Metodología de Confiabilidad Weibull para el diseño de rodamientos de bola en base a esfuerzos de Hertz*. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
- Wang, M., Liu, X., Wang, X., & Wang, Y. (2018). Probabilistic modeling of unified S-N curves for mechanical parts. *International Journal of Damage Mechanics*, 27(7), 979–999. <https://doi.org/10.1177/1056789517719117>
- Wang, X., Zhou, A., & Zhang, T. (2022). Reliability Sensitivity Analysis of Rolling Bearings Based on Contact Fatigue under Finite Probability Information. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/6345706>
- Wang, Y., & Peng, Z. (2020). Fatigue life prediction method of mechanical parts based on Weibull distribution. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 782(2). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/782/2/022068>
- Wei, X., Zhang, C., Han, S., Jia, Z., Wang, C., & Xu, W. (2022). High cycle fatigue S-N curve prediction of steels based on transfer learning guided long short term memory network. *International Journal of Fatigue*, 163. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.107050>
- Zaretsky, E. V. (2016). *Rolling Bearing Life Prediction, Theory, and Application*. <http://www.sti.nasa.gov>
- Zhang, L., Jiang, B., Zhang, P., Yan, H., Xu, X., Liu, R., Tang, J., & Ren, C. (2023). Methods for fatigue-life estimation: A review of the current status and future trends. In *Nanotechnology and Precision Engineering* (Vol. 6, Issue 2). American Institute of Physics Inc. <https://doi.org/10.1063/10.0017255>
- Zhao, W., Jiang, Z., Zhang, P., & Huang, X. (2023). Reliability Sensitivity Analysis of Main Shaft Bearings of Wind Turbines Subject to Subsurface Stress. *Machines*, 11(7). <https://doi.org/10.3390/machines11070681>